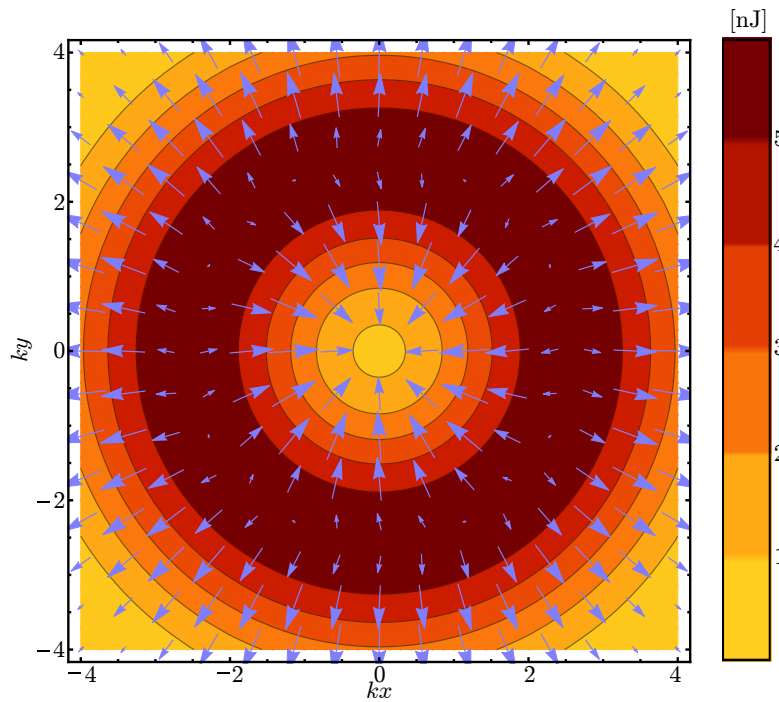


JOSÉ PEREIRA LEÃO NETO

Força e torque de radiação sobre uma partícula viscoelástica em um fluido ideal



Força de radiação transversal de um feixe de Bessel de primeira ordem em uma partícula de polietileno.

JOSÉ PEREIRA LEÃO NETO

Força e torque de radiação sobre uma partícula viscoelástica em um fluido ideal

Tese apresentada no Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, como requisito necessário para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Glauber T. Silva

Maceió - Brasil
Setembro - 2015

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

L437f	<p>Leão Neto, José Pereira.</p> <p>Força e torque de radiação sobre uma partícula viscoelástica em um fluido ideal / José Pereira Leão Neto. – 2015.</p> <p>98 f.: il.</p> <p>Orientador: Glauber T. Silva.</p> <p>Tese (doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Programa de Pós-Graduação em Física. Maceió, 2015.</p> <p>Bibliografia: f. 90 – 98.</p> <p>1. Força de radiação acústica. 2. Torque de radiação. 3. Acústica. 4. Espalhamento acústico. 5. Viscoelasticidade. 6. Manipulação de partículas.</p> <p>I. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 530.145.6:539.12</p>
-------	---



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL, Brasil
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
TESE DE DOUTORADO

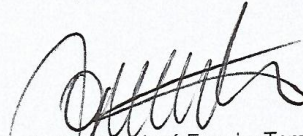
“Força e torque de radiação sobre uma partícula viscoelástica em um fluido ideal”

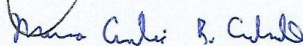
por

José Pereira Leão Neto

A Banca Examinadora composta pelos professores Glauber José Ferreira Tomaz da Silva (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Marco Aurélio Brizzotti Andrade, do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, José Henrique Araújo Lopes de Andrade, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas, Sérgio Henrique Albuquerque Lira, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Iram Marcelo Gléria, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, consideram o candidato aprovado com grau “A”.

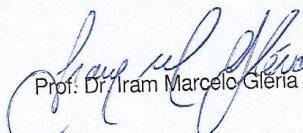
Maceió, 30 de setembro de 2015


Prof. Dr. Glauber José Ferreira Tomaz da Silva


Prof. Dr. Marco Aurélio Brizzotti Andrade


Prof. Dr. José Henrique Araújo Lopes de Andrade


Prof. Dr. Sérgio Henrique Albuquerque Lira


Prof. Dr. Iram Marcelo Gléria

Dedico esta tese a minha esposa Lidiane
Omena, aos meus Pais Ilson Leão e Maria
de Fátima e aos meus irmãos, Ilson Jr.,
Ielson, Ivens e Fernanda.

Agradecimentos

A Deus por ter sido minha fortaleza e sustento nas horas difíceis durante esta etapa da minha vida.

A minha esposa Lidiane Omena, por estar ao meu lado em todos os momentos me incentivando, pelo o seu amor incondicional e por toda a sua paciência e compreensão nesta etapa tão difícil.

Aos meus pais Ilson e Fátima, por todo o sacrifício, dedicação, e por abdicarem de projetos pessoais para que eu tivesse a oportunidade de estudar. Enfim, obrigado por ter me dado a educação e direcionamento que foram imprescindíveis para a minha formação.

Aos meus irmãos Ilson Jr, Ielson Leão, Ivens Leão e Ilza Fernanda por todo companheirismo, fidelidade e por sempre serem exemplos de determinação e união na minha vida.

A Grande família: D. Claudete, D. Socorro, Lidyane Ignácio, Iris Lima, Gabriela Azevedo, Regina Toledo e Marcos André por toda a união, apoio e incentivo. Além das datas importantes, momentos especiais, que estamos todos juntos fazendo sempre boas confraternizações, com boas conversas e risadas. Não poderia deixar de agradecer aos meus sobrinhos: Leonardo Ignácio, Maria Leticia e Ian Rafael pela alegria e energia de sempre.

A todos meus familiares que estiveram presentes durante a minha formação.

Ao Prof. Glauber T. Silva por acreditar no meu trabalho, pelo seu apoio, dedicação e disposição em ajudar. Dispondo de horas de orientação para a concretização deste trabalho.

Ao grupo tucano azul, que já são minha família: André Moura (Gabeh), Emmanuelle Satiko, Henrique Lopes (Galo Cego) e Tamirys Macedo. Pelos momentos de descontração, que não foram poucos, pela amizade de cada um de vocês. Por estarem sempre presentes, independente do momento que cada um esta passando.

Aos amigos Frederico Passos, Alex Costa e Anderson Bandeira por estarem sempre dispostos a ajudar, por ter aprendido muito com vocês e pelos incentivos dados durante toda a minha formação.

Aos amigos Luiz Eduardo, Valmiro Hora e Rogério Matias que tive a oportunidade de conviver e aprender muito.

Aos amigos Prof. Wandearley Dias e Prof^a. Socorro Seixas pelo companheirismo, pelas boas conversas e pelos incentivos que foram essenciais nesta etapa.

Aos amigos do GAF, em especial ao Prof. André Baggio por toda colaboração.

Aos professores da banca, por aceitar participar deste momento importante na minha formação e contribuir com este trabalho.

A todos os amigos do Instituto de Física, em especial, aos amigos da Batcaverna.

A todo corpo docente do IF, por contribuído significativamente na minha formação acadêmica. Em especial aos professores, Crisógono Silva e Kléber Serra.

A CAPES pelo apoio financeiro durante o Doutorado.

“Apesar dos nossos defeitos, precisamos enxergar que somos pérolas únicas no teatro da vida e entender que não existem pessoas de sucesso ou pessoas fracassadas. O que existe são pessoas que lutam pelos seus sonhos ou desistem deles.”

Augusto Cury

Resumo

O estudo dos fenômenos de força e torque de radiação acústico tem atraído um enorme interesse da comunidade científica, devido a aplicações desses fenômenos em manipulação de partículas sem contato. Neste trabalho, realizamos uma análise teórica da força e torque de radiação acústico exercido sobre uma partícula viscoelástica homogênea no limite do espalhamento de Rayleigh (o raio da partícula é muito menor que o comprimento de onda incidente) por uma onda com geometria arbitrária. Nosso estudo baseia-se na expansão de ondas parciais em coordenadas esféricas das ondas incidente e espalhada. Nesse contexto, a força e o torque de radiação são obtidos analiticamente em termos de uma série infinita que envolve os coeficientes de expansão das ondas espalhada e incidente. Assumimos que a partícula se comporta como um sólido viscoelástico linear, que obedece o modelo de Kelvin-Voigt fracionário. Fórmulas analíticas para a força e torque de radiação são obtidas considerando uma aproximação de baixa e de alta frequência no modelo viscoelástico. A teoria desenvolvida é usada para descrever a interação de ondas acústicas (onda plana progressiva, onda plana estacionária, feixes de Bessel de ordem zero e de primeira ordem) com partículas de polietileno de baixa e de alta densidade. Os nossos resultados mostram que a força de radiação acústica axial pode ser negativa (isto é, em oposição à direção de propagação da onda) quando uma determinada condição envolvendo os parâmetros físicos da partícula é satisfeita. Torque de radiação acústico negativo devido a um feixe de Bessel de primeira ordem também pode ocorrer quando a mesma condição da força de radiação negativa for atendida. Notavelmente, esta é a primeira vez que a força de radiação negativa é prevista sobre uma partícula homogênea no regime de espalhamento Rayleigh. Além disso, a estabilidade transversal da força de radiação acústica gerada pelo feixe de Bessel também é investigada. Mostramos que um feixe de Bessel trator 3D completo atua sobre uma partícula de polietileno de alta densidade (PEAD). Na análise da força de radiação acústica gerada sobre uma partícula viscoelástica por uma onda plana estacionária, desvios relevantes surgiram em comparação com partícula sólida elástica. A amplitude da força e torque de radiação sobre uma PEAD descrita pelo modelo viscoelástico apresenta um comportamento diferente (força de radiação negativa) comparados com os outros materiais (sólida elástica e fluida com absorção longitudinal) devido a onda plana progressiva e feixes de Bessel. Por fim, acreditamos que este estudo pode ajudar a melhorar ainda mais o desenvolvimento de dispositivos de levitação acústica, manipulação de partículas em acustofluídica e pinças acústicas.

Palavras-chave: Força de radiação acústica, Torque de radiação acústico, Espalhamento acústico, Viscoelasticidade, Manipulação de partículas.

Abstract

The study of acoustic radiation force and torque phenomena has attracted an enormous interest of the scientific community, due to applications of these phenomena in noncontact particles manipulation. In this work, we perform a theoretical analysis of acoustic radiation force and torque exerted on a homogeneous viscoelastic particle in the Rayleigh scattering limit (the particle radius is much smaller than the incident wavelength) by a wave with arbitrary geometry. Our study is based on the partial-wave expansion in spherical coordinates of the incident and scattered waves. In this context, the radiation force and torque are obtained analytically in terms of an infinite series which involves the scattering and incident expansion coefficients. We assume that the particle behaves as a linear viscoelastic solid, which obeys the fractional Kelvin-Voigt model. Analytical expressions for the radiation force and torque are obtained considering the low- and high-frequency approximation in the viscoelastic model. The developed theory is used to describe the interaction of acoustic waves (traveling and standing plane waves, and zero and first-order Bessel beams) with a low- and high-density polyethylene particle. Our results show that the axial acoustic radiation force might become negative (i.e. in opposition to the wave propagation direction) when a certain condition involving the physical parameters of the particle is satisfied. Negative acoustic radiation torque due a beam of first-order Bessel may also occur when the same condition of negative radiation force is met. Remarkably, this is the first time that negative radiation force is predicted on a homogeneous particle in the Rayleigh scattering regime. Furthermore, the stability of the transverse acoustic radiation force generated by a Bessel beam is also investigated. We show a full 3D tractor Bessel vortex beam acting on the high-density polyethylene (HDPE). In the analysis of acoustic radiation force generated on a viscoelastic particle by a standing plane wave, relevant deviations arose in comparison with the solid elastic model for the particles. The magnitude of the radiation force and torque on a HDPE described by the viscoelastic model behaves differently (negative radiation force) compared with other materials (solid elastic and compressible fluid particle) due to traveling plane wave and Bessel beams. Finally, we believe that this study may help further enhance the development of acoustic levitation, particle handling in acoustofluids, and acoustical tweezers devices.

Keywords: Acoustic radiation force, Acoustic radiation torque, Acoustic scattering, Viscoelasticity, Particle manipulation.

Lista de símbolos

Símbolo	Nome	Unidades(S.I.)
ρ_0	densidade do fluido ideal	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
ρ	densidade	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
m	massa	kg
c_0	velocidade do som no fluido ideal	m/s
c_ℓ	velocidade do som longitudinal	m/s
c_s	velocidade do som de cisalhamento	m/s
τ_ℓ	tempo de relaxação longitudinal	s
τ_s	tempo de relaxação de cisalhamento	s
a	raio da partícula	m
\mathbf{w}	vetor deslocamento	m
\mathbf{v}	velocidade da partícula	m/s
ϵ	tensor deformação	
σ	tensor de tensões em sólidos	
p	pressão acústica	Pa
\mathcal{L}	densidade Lagrangiana acústica	J/m^3
ϕ	potencial de velocidade	m^2/s
$\psi_{1,s}, \psi_{2,s}$	potenciais escalares de Debye	m^2/s
ω	frequência angular	s^{-1}
λ	comprimento de onda	m^{-1}
k	número de onda	m^{-1}
k_ℓ	número de onda longitudinal	m^{-1}
k_s	número de onda de cisalhamento	m^{-1}
a_{nm}	coeficiente forma do feixe	
s_n	coeficiente de espalhamento escalar	
b_n, c_n, d_n	coeficientes de expansão	
ϵ	parâmetro de escala em termos do tamanho da partícula	
ϵ_j	parâmetro de escala em termos tempo de relaxação	
φ	ângulo azimutal	
θ	ângulo radial	
j_n	função de Bessel esférica de ordem n	
$h_n^{(1)}$	função de Hankel esférica de primeira ordem n	
$h_n^{(2)}$	função de Hankel esférica de primeira ordem n	
Y_n^m	harmônicos esféricos	
P_n^m	funções associadas de Legendre de ordem n	
\mathbf{F}^{rad}	força de radiação acústica	N
Y_x, Y_y, Y_z	componentes dimensionais da força de radiação	
\mathbf{N}^{rad}	torque de radiação acústico	$\text{N} \cdot \text{m}$
N_x, N_y, N_z	componentes dimensionais do torque de radiação	
∇	operador gradiente	m^{-1}
$\nabla \cdot$	operador divergente	m^{-1}

$\nabla \times$	operador rotacional	m^{-1}
∇^2	operador Laplaciano	m^{-2}
\mathbf{r}	vetor posição	m
(x, y, z)	coordenadas cartesianas	
(r, θ, ϕ)	coordenadas esféricas	
$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$	componentes cartesianas unitárias	
\mathbf{n}	vetor normal à superfície	
n_c	índice de refração complexo	
n_R	índice de refração do material	
$\tilde{\alpha}$	função de absorção adimensional	
Re	parte real	
Im	parte imaginária	
$i = \sqrt{-1}$	unidade imaginária	

Lista de Tabelas

3.1	Coeficientes de espalhamento dados na Eq. (3.37) são obtidos resolvendo o sistema de equações lineares para condições de contorno na superfície da partícula. Os Elementos da matriz dessa equação são dados aqui.	51
5.1	Parâmetros e medidas da qualidade do ajuste para a função de absorção na Eq. (5.25) e dados experimentais de absorção longitudinal e de cisalhamento extraídos das Fig. 4 e 5 da Ref. [109].	75
5.2	Propriedades físicas e os parâmetros de ajustes da partícula de polietileno de baixa densidade (PEBD) e do polietileno de alta densidade (PEAD). Os dados foram extraídos à temperatura ambiente (20° C) na Ref. [109] . . .	78

Lista de Figuras

1.1	Levitação acústica de partículas de poliestireno para três configurações diferentes do levitador.	20
2.1	Forças atuando sobre as partículas de massa m_i e velocidade v_i que ocupam um elemento de fluido de volume $V_0(t)$	27
2.2	Coordenadas esféricas (r, θ, φ) : r é a distância radial, θ é o ângulo polar e φ é o ângulo azimutal.	31
2.3	Deformação de um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 para o volume V'_0 e superfície S'_0	35
2.4	Representação do vetor tração \mathbf{q} de um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 devido a forças externas $f_i (i = 1, 2, 3)$	35
3.1	Um feixe incidente (barras verticais verde-escuro), com comprimento de onda λ e representado pela amplitude do potencial de velocidade ϕ_{in} , atinge uma pequena partícula viscoelástica (círculo vermelho) de raio a suspenso num fluido, com densidade ρ_0 e a velocidade de som c_0 . Um sistema de coordenadas cartesiana está situado no centro da partícula com um ponto de observação designado por $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Coordenadas esféricas (r, θ, φ) também são ilustrados. As ondas espalhadas (arcos verde claro) são representados pela amplitude do potencial de velocidade ϕ_{sc} . Setas pretas indicam as direções de propagação da onda.	46
4.1	Ilustração da interação entre a onda incidente ϕ_{in} (barras verticais verde-escuro) de comprimento de onda λ e a partícula viscoelástica (círculo vermelho) de raio a suspensa em um fluido ideal. A onda espalhada devido essa interação é denotada por ϕ_{sc} (arcos verde claro).	54
4.2	Sistema de coordenadas para computar a força de radiação acústica em uma partícula esférica de raio a utilizando uma superfície de controle S_c (linhas tracejadas) de raio R_c	57

5.1	Feixe de Bessel representado por uma superposição de ondas planas com β sendo o ângulo de meio cone. O círculo vermelho representa a partícula.	71
5.2	Ajuste da função de absorção da Eq. (5.25) dos dados experimentais de absorção longitudinal (a) e de cisalhamento (b) extraídos das Fig. 4 e 5 da Ref. [109] para uma partícula de Polietileno de alta densidade (PEAD). Legenda: linha sólida azul representa o ajuste da função de absorção dada na Eq. (5.25), pontos vermelhos representam os dados experimentais dado nas Fig. 4 e 5 da Ref. [109].	76
5.3	Ajuste da função de absorção da Eq. (5.25) dos dados experimentais de absorção longitudinal (a) e de cisalhamento (b) extraídos das Fig. 4 e 5 da Ref. [109] para uma partícula de Polietileno de baixa densidade (PEBD). Legenda: linha sólida azul representa o ajuste da função de absorção dada na Eq. (5.25), pontos vermelhos representam os dados experimentais dado nas Fig. 4 e 5 da Ref. [109].	77
5.4	Força de radiação acústica versus frequência exercida sobre uma partícula de polietileno de alta densidade (PEAD) e de uma partícula de polietileno de baixa densidade (PEBD). As configurações são: uma onda plana progressiva agindo sobre uma partícula (a) de PEAD e (b) de PEBD. As partículas de PEAD e PEBD são suspensa em água e tem raio de $a = 1.0, 0.01$ mm, respectivamente. Os parâmetros físicos das partículas são dados na Tabela 5.2. Os feixes incidentes têm pico de intensidade de $I_0 = 30\text{kW/m}^2$. Legenda: linha sólida azul representa a força de radiação avaliada na aproximação monopolo-dipolo dada na Eq. (4.41), linha vermelha tracejada representa a força de radiação nos regimes de baixa e alta frequência através da Eqs. (5.5) para onda plana progressiva. Os insertes mostram o erro relativo entre a fórmulas de força de radiação. A linha vertical pontilhada delimita a região da aproximação Rayleigh, $\varepsilon < 0.3$	80
5.5	Força de radiação acústica versus frequência exercida sobre uma partícula de polietileno de alta densidade (PEAD) e de uma partícula de polietileno de baixa densidade (PEBD). As configurações são: feixe de Bessel de primeira ordem com $n = 1$ e $\beta = 45^\circ$ agindo sobre uma partícula de (a) PEAD e (b) de PEBD. As partículas de PEAD e PEBD são suspensa em água e tem raio de $a = 1.0, 0.01$ mm, respectivamente. Os parâmetros físicos das partículas são dados na Tabela 5.2. Os feixes incidentes têm pico de intensidade de $I_0 = 30\text{ kW/m}^2$. Legenda: linha sólida azul representa a força de radiação avaliada na aproximação monopolo-dipolo dada na Eq. (4.41), linha vermelha tracejada representa a força de radiação nos regimes de baixa e alta frequência através da Eq. (5.16) para feixe de Bessel de primeira ordem. Os insertes mostram o erro relativo entre a fórmulas de força de radiação. A linha vertical pontilhada delimita a região da aproximação Rayleigh, $\varepsilon < 0.3$	81

5.6	<p>Campo vetorial (setas) da força de radiação transversal no plano xy, exercido sobre a partícula de PEAD com raio $a = 1$ mm na água. O gráfico de contorno corresponde a energia potencial da força de radiação U_1 dada na Eq. (5.17). Os parâmetros do feixe de Bessel de primeira ordem são os mesmos descritos na legenda da Fig. 5.5. No entanto, aqui fixamos a frequência para 50 kHz. O campo vetorial da força de radiação é calculado através da Eq. (5.20).</p>	82
5.7	<p>Força de radiação acústica produzida por uma onda plana estacionária ao longo do eixo z em (a) uma partícula de PEAD para 50 kHz e (b) uma partícula de PEBD para 2 MHz, imerso em água. Os parâmetros físicos da partícula são dados na Tabela 5.2. A onda plana estacionária tem pico de pressão de 0.3 MPa. A força de radiação foi computada usando a Eq. (5.8). Para o modelo elástico em perdas, assumimos que $f_0^{(R)} = f_0^{(E)}$.</p>	83
5.8	<p>Torque de radiação acústico versus frequência exercido por um feixe de Bessel de primeira ordem sobre (a) uma partícula de PEAD e (b) uma partícula de PEBD de raio $a = 1.0, 0.01$ mm, respectivamente, imerso em água. Os parâmetros físicos das partículas são dados na Tabela 5.2. O feixe incidente tem seu pico de intensidade de $I_0 = 30$ kW/m². Legenda: linha sólida azul é o torque de radiação avaliado na aproximação monopolo-dipolo dado na Eq. (4.62), linha vermelha tracejada representa o torque de radiação nos regimes de baixa e alta frequência através da Eq. (5.24). Os insertes mostram o erro relativo entre as fórmulas de torque. A linha vertical pontilhada delimita a região da aproximação Rayleigh $\epsilon < 0.3$.</p>	85
5.9	<p>Força de radiação acústica produzida por uma onda plana progressiva, feixe de Bessel de ordem zero e feixe de Bessel de primeira ordem exercida sobre uma partícula de (a) PEAD e (b) PEBD de raios $a = 1.0, 0.01$ mm, respectivamente. Os feixes incidentes tem frequência de (a) 2 MHz e (b) 50 kHz, pico de intensidade $I_0 = 30$ kW/m², e ângulo de meio cone $\beta = 45^\circ$. Os valores das amplitudes das forças são mostrados próximos ou dentro de suas barras correspondentes.</p>	86

Sumário

1	Introdução	16
1.1	Revisão Histórica	16
1.1.1	Força de radiação acústica	16
1.1.2	Torque de radiação acústico	18
1.2	Aplicações	19
1.2.1	Levitação acústica	19
1.2.2	Pinça acústica	20
1.2.3	Acustofluídica	21
1.3	Motivação	21
1.4	Artigos e publicações	22
1.5	Apresentação geral do trabalho	22
2	Equações do modelo	24
2.1	Equações de conservação para um fluido ideal	24
2.1.1	Equação de conservação da massa	25
2.1.2	Equação de conservação do momento	26
2.1.3	Conservação da energia	27
2.2	Propagação da onda no fluido ideal	28
2.2.1	Equação linear da onda	29
2.2.2	Equação de Helmholtz	30
2.2.3	Solução da equação de Helmholtz	31
2.3	Equações de conservação para sólidos	33
2.3.1	Deformação	34
2.3.2	Tensão	34
2.3.3	Conservação da massa	36
2.3.4	Conservação do momento	36
2.3.5	Conservação da energia	37
2.4	Modelo de Kelvin-Voigt	38
2.5	Modelo de Kelvin-Voigt Fracionário	41

3	Espalhamento acústico no limite de Rayleigh	44
3.1	Espalhamento por uma esfera viscoelástica	44
3.2	Limite de Rayleigh	50
4	Força e torque de radiação acústico no limite de Rayleigh	53
4.1	Efeitos negligenciados	53
4.2	Força de radiação acústica no limite de Rayleigh	54
4.2.1	Tensor tensão de radiação	54
4.2.2	Método de campo distante	56
4.3	Torque de radiação acústico no limite de Rayleigh	61
4.3.1	Fluxo do momento angular	61
4.3.2	Método de campo distante	62
4.4	Expansão assintótica do índice de refração complexo	64
4.4.1	Regime de baixa frequência	65
4.4.2	Regime de alta frequência	66
5	Resultados e discussões	68
5.1	Exemplos de ondas acústicas	68
5.1.1	Onda plana progressiva	69
5.1.2	Onda plana estacionária	70
5.1.3	Feixe de Bessel acústico	70
5.2	Resultados e discussões para partículas de polietileno	74
5.2.1	Estimativa dos parâmetros do polietileno	74
5.2.2	Análise dos parâmetros de escala	78
5.2.3	Ondas progressivas	79
5.2.4	Feixe de Bessel trator	79
5.2.5	Onda plana estacionária	82
5.2.6	Torque de radiação por um feixe de Bessel	84
5.2.7	Comparação com partículas sem absorção de cisalhamento	84
6	Conclusões e trabalhos futuros	88
6.1	Conclusões	88
6.2	Trabalhos futuros	89

Introdução

Ondas acústicas consistem em perturbações que transportam energia e momento. O momento da onda incidente pode ser transferido para objetos suspensos. Esta transferência do momento linear e angular da onda acústica harmônica para um objeto suspenso pode dar origem aos fenômenos de força e torque de radiação [1, 2].

Quando um campo acústico é aplicado em um fluido contendo partículas suspensas, essas partículas serão afetadas devido a força de radiação acústica. A manipulação de partículas por ultrassom utiliza a força de radiação para fornecer um método de manipulação de partículas sem contato. Este método tornou-se promissor na área de biotecnologia e permite a manipulação de diversas partículas, incluindo células biológicas e outros microrganismos [3]–[15] e levitação acústica no ar [16]–[19]. Estes métodos dependem somente das propriedades mecânicas da partícula e do fluido. Além de ser transladada ou aprisionada, uma partícula pode ser ajustada para girar devido ao torque de radiação acústico [20]–[22]. Conseqüentemente, um grau de liberdade de rotação também é avaliado na manipulação de partículas com base em métodos acústicos.

Neste capítulo faremos uma revisão histórica dos fenômenos de força e torque de radiação acústico gerados por meio da interação de uma onda acústica com um objeto. Além disso, iremos abordar algumas aplicações tecnológicas e apresentar a motivação deste trabalho.

1.1 Revisão Histórica

1.1.1 Força de radiação acústica

O estudo de força de radiação acústica em partículas esféricas teve início em 1934 [23]. Nesse trabalho pioneiro, King obteve uma expressão geral para a força de radiação acústica aplicada a uma esfera rígida (tamanho arbitrário) suspensa em um fluido ideal devido a uma onda plana progressiva e uma onda plana estacionária. A força de radiação foi expressa em termos de uma série infinita, conhecida como expansão de ondas parciais. Uma extensão do trabalho de King considerando uma onda esférica incidente foi proposto por Embleton [24]. Percebeu-se que a partícula pode ser tanto atraída como repelida

pela fonte em função da distância relativa. Posteriormente, Yosioka e Kawasima [25] obtiveram uma fórmula para força de radiação acústica agindo sobre uma partícula esférica compressível suspensa em um fluido ideal. Eles analisaram a interação de uma onda plana estacionária incidente em uma partícula compressível e notaram que pode-se mover a partícula para um nó ou anti-nó de pressão dependendo das propriedades acústicas do fluido e da partícula. Em 1957, Westervelt [26] encontrou uma expressão para força de radiação em termos da função de espalhamento assintótico sobre um obstáculo arbitrário devido a uma onda plana incidente. Subsequentemente, Gorkov [27] propôs um modelo de força de radiação exercida sobre uma partícula compressível devido a um feixe incidente de geometria arbitrária. Ele mostrou que para uma onda plana estacionária a força tem contribuições importantes dos termos de interferência entre ondas incidente e espalhada, enquanto que para onda plana progressiva a magnitude do momento linear transmitido à partícula é determinado somente pelas ondas espalhadas. Assim, a magnitude da força de radiação média em uma onda estacionária é muito maior que em uma onda plana progressiva. No entanto, o método utilizado por Gorkov tem uma limitação, ele considerou que a partícula esférica compressível é muito menor que o comprimento de onda incidente. Nesta aproximação, somente os coeficientes de espalhamento de monopolo e dipolo são considerados. Nyborg [28] fez uso dos métodos desenvolvidos por King e Embleton para estudar a força de radiação sobre uma pequena esfera rígida devido uma onda esférica. Ele expressou a força de radiação como gradiente da densidade de energia potencial e cinética do feixe incidente e mostrou que a parte progressiva da onda esférica pode ser descrita pela teoria de Gorkov com um termo de correção. A teoria de força de radiação acústica sobre uma esfera elástica suspensa em um fluido ideal devido a uma onda plana progressiva é desenvolvida por Hasegawa [29]. O cálculo da força de radiação em uma pequena esfera compressível devido a um feixe esférico focalizado foi proposto por Wu e Du [30]. Os resultados foram expressos em termos das densidades de energia potencial e cinética do feixe incidente. Nesse estudo, eles mostraram que o feixe focalizado pode ser uma alternativa para levitação de pequenas esferas de alta densidade. Um estudo mais abrangente sobre feixes de Bessel tem sido realizado devido a característica desse feixe em gerar força de radiação negativa. Marston obteve uma expressão da força de radiação gerada pela interação de um feixe de Bessel de ordem zero com uma partícula fluida [31], sólida e casca esférica de alumínio [32] no eixo do feixe. Ele apresentou as condições para produzir uma força negativa (isto é, oposta à direção de propagação do feixe) sobre a partícula. Além disso, ele propôs um estudo da força de radiação devido a um feixe de Bessel de primeira ordem [33] sobre uma partícula esférica imersa em água, e obteve força de radiação negativa como investigado anteriormente para feixe de Bessel de ordem zero. Mitri [34] demonstrou que a força de radiação de um feixe de Bessel de alta ordem agindo sobre uma esfera é oposta a direção de propagação do feixe. O comportamento de um feixe de Bessel trator de ordem zero atuando em uma esfera fluida foi apresentado [35]. Ele também apresentou alguns trabalhos sobre força de radiação em um feixe de Bessel de onda estacionária [36]–[40] com intuito de aplicar esse estudo em manipulação de partículas. Silva [41] obteve uma solução da força de radiação exercida para um feixe acústico de forma arbitrária sobre um objeto de geometria arbitrária. Esta

expressão da força de radiação é obtida como uma função dos coeficientes de forma do feixe de uma onda incidente e dos coeficientes de espalhamento. Posteriormente, Zhang e Marston [42] desenvolveram uma interpretação geométrica da força de radiação exercida pelo feixe de Bessel de ordem zero em uma esfera no eixo em termos das seções transversais de absorção, espalhamento e da potência extraída do feixe. Um estudo semelhante sobre uma classe mais ampla de feixes acústicos foi também realizado por este grupo [43, 44]. Azarpeyvand [45] realizou um estudo teórico sobre a força de radiação exercida sobre uma esfera porosa de alumínio no eixo. Neste caso, o aumento da porosidade degrada a força de radiação sobre uma partícula pequena. Ele também apresentou um estudo sobre a manipulação acústica de cascas esféricas porosas e os resultados obtidos indicam que a manipulação de cascas de baixa porosidade é possível usando feixes de Bessel com grandes ângulos cônicos [46]. A força de radiação de um feixe de Bessel exercido sobre uma pequena partícula foi investigado por Baresch e colaboradores [47, 48]. Além disso, Sapozhnikov [49] desenvolveu uma abordagem teórica para calcular força de radiação de um feixe acústico arbitrário sobre uma esfera elástica dentro de um líquido ou gás. Fórmulas exatas da força de radiação acústica exercida por uma onda harmônica arbitrária sobre uma pequena partícula compressível absorvedora, suspensa num fluido ideal, foi proposta por Silva [50].

A força de radiação acústica entre duas ou mais partículas não absorvedoras também têm sido analisada [51]–[57]. Alguns esforços têm sido dedicado a compreender a força de radiação agindo sobre uma partícula revestida por uma camada viscoelástica [58]–[60]. Verificou-se que, na presença de uma camada viscoelástica, a força de radiação axial por ondas progressivas pode tornar-se negativa, o que significa que a força e a direção de propagação da onda são contrárias [61].

1.1.2 Torque de radiação acústico

Uma onda acústica pode transportar momento angular, e este pode ser transferido para um objeto suspenso. Essa interação da onda acústica com um objeto suspenso num fluido pode gerar um torque médio, conhecido como torque de radiação acústico. Uma das primeiras observações a respeito desde fenômeno foi relatada por Rayleigh [62]. O torque de radiação Rayleigh é provocado pelo momento do estresse de radiação agindo sobre um objeto assimétrico. Um trabalho pioneiro a respeito deste fenômeno foi proposto por Maidanik [63]. Neste trabalho ele derivou uma expressão para o torque de radiação sobre um objeto de forma arbitrária devido a pressão de radiação acústica fazendo o uso do teorema do momento angular. Uma fórmula alternativa para o torque de radiação que depende de variações na amplitude de espalhamento para mudanças na orientação da onda plana incidente foi obtido por Smith [64] por meio de uma generalização do teorema ótico. Hefner e Marston [65] mostraram que um torque de radiação axial pode ser desenvolvido em um objeto absorvedor por um feixe de vorticidade paraxial. Fan e colaboradores [66] estabeleceram uma teoria para calcular o torque de radiação sobre um espalhador de forma arbitrária para uma onda acústica arbitrária. Esse estudo é limitado, pois o espalhador tem que ser pequeno quando comparado ao comprimento de onda. Zhang e Marston [67]

estudaram teoricamente o torque de radiação axial sobre um objeto com simetria axial suspenso num fluido ideal. Eles também expressaram o torque de radiação como a integral do fluxo do momento angular médio sobre uma superfície esférica distante do objeto espalhador [68]. Silva e colaboradores [69] forneceram uma expressão geral para o torque de radiação tridimensional exercido por um feixe acústico de frente de onda arbitrária sobre um objeto de qualquer forma geométrica em termos dos coeficientes de forma do feixe e de espalhamento. Além disso, Silva desenvolveu uma expressão para torque de radiação acústico sobre uma pequena partícula fluida para campo acústico arbitrário [50]. Um estudo sobre torque de radiação axial de um feixe de Bessel progressivo e estacionário sobre uma casca esférica foi desenvolvido por Mitri [70]. Anhauser e colaboradores [21] apresentaram o primeiro teste quantitativo de transferência do momento angular para um objeto absorvedor imerso em um líquido viscoso. Na experiência realizada, ele observou que é possível girar um disco de tamanho milimétrico utilizando feixe gerado por um transdutor esférico. Schwarz e colaboradores [22] fizeram uma análise teórica do torque de radiação acústico e realizaram um experimento que é capaz de rotacionar partículas não esféricas de forma controlada por meio de ondas acústicas estacionárias.

1.2 Aplicações

O interesse em força de radiação acústica tem crescido nas últimas décadas devido a aplicações em manipulação de partículas sem contatos suspensa em um fluido. Diferentes aplicações biotecnológicas surgiram, incluindo levitação acústica, pinças acústicas e microfluídica (lab-on-a-chip).

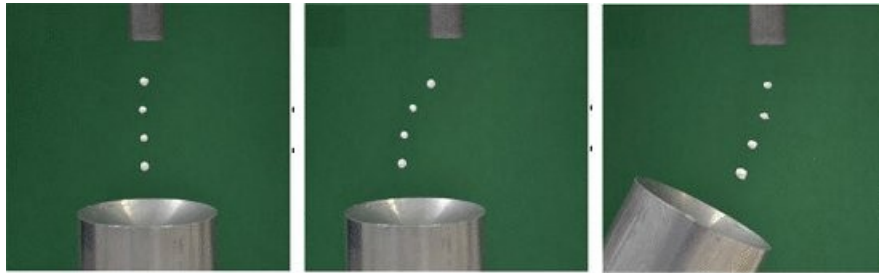
1.2.1 Levitação acústica

A levitação é um processo no qual um objeto é suspenso em uma posição estável sem contato. Um sistema de levitação acústica é composto por um transdutor, superfície com vibração harmônica capaz de produzir uma onda sonora de frequência definida e um refletor. Desta forma, uma onda estacionária é gerada devido a reflexões entre o transdutor e um refletor. A levitação acústica é uma das aplicações que utiliza onda estacionária.

Em 1985, Trinh [16] utilizou o método de onda estacionária para levantar amostras com dimensões típicas que variam de $100\ \mu\text{m}$ a $5\ \text{mm}$ e temperaturas entre 40°C e 500°C . Gammel e colaboradores [71] utilizaram uma sirene operando a $3260\ \text{Hz}$ e um refletor apropriado para mostrar que é possível levantar livremente uma bola de aço de $1\ \text{cm}$ de diâmetro. Xie e Wei [72] notaram um aumento notável da força de levitação projetando adequadamente a forma do refletor. Isto permitiu levantar bolas de tungstênio de alta densidade $18,9\ \text{g/cm}^3$. Brandt [17] mostrou que ondas de ultrassom pode levantar bolas pesadas de tungstênio. Este método de manter os objetos suspensos sem contato no ar podem ser aplicados para a investigação e o processamento dos novos materiais. Foresti e colaboradores [18, 73] apresentaram uma demonstração experimental e teórica de um conceito que permite levantar e movimentar controladamente a matéria sem contato,

incluindo movimento orbital ou rotação da gotículas e partículas no ar. Andrade e colaboradores [19] fizeram uma análise de um levitador acústico formado por um transdutor de ultrassom e um refletor côncavo. Em contraste com levitadores tradicionais, a geometria apresentada neste trabalho não necessita que a distância de separação entre o transdutor e o refletor seja múltipla de meio comprimento de onda. Além disso, eles demonstraram que as partículas de levitação podem ser manipuladas através do controle da posição do refletor, mantendo o transdutor numa posição fixa, Fig. (1.1).

Figura 1.1: Levitação acústica de partículas de poliestireno para três configurações diferentes do levitador.



Fonte: Marco Andrade e colaboradores, 2015 [19].

1.2.2 Pinça acústica

Uma das primeiras aplicações da força de radiação foi denominada pinça acústica, que é uma técnica para aprisionamento de partículas que utiliza feixes acústicos. Duas abordagens diferentes têm sido utilizadas para aprisionamento de micropartículas denominadas de onda estacionária e método de feixe único. O primeiro sistema de pinça acústica foi proposto por Wu com um dispositivo capaz de aprisionar estavelmente partículas de latex e ovos de rã de $270\ \mu\text{m}$ de diâmetro em água [3]. Esse dispositivo é composto por dois feixes focalizados contrapropagantes para formar uma onda estacionária de $3.5\ \text{MHz}$ capaz de aprisionar micropartículas. Kozuka e colaboradores [4] apresentaram um método de pinça acústica utilizando uma onda estacionária de $2.1\ \text{MHz}$ gerada por um transdutor focalizado e um refletor capaz de aprisionar micropartículas de alumínio com diâmetro médio de $16\ \mu\text{m}$. Ondas estacionárias inclinadas são produzidas por uma configuração de três transdutores operando a $1.67\ \text{MHz}$ foram usadas para aprisionar e transportar gotas de sílica de $100\ \mu\text{m}$ de diâmetro [74].

Por outro lado, a abordagem de pinças acústicas através do método de feixe único utiliza transdutores bem focalizados para aprisionar partículas no ponto focal do dispositivo. Lee e colaboradores [6] desenvolveram um dispositivo acústico de feixe único utilizando um transdutor de $30\ \text{MHz}$ capaz de aprisionar gotículas de lipídios de $126\ \mu\text{m}$ de diâmetros. Transdutores com frequências mais altas que operam a $200\ \text{MHz}$ foram projetados para imobilizar e transladar uma célula de leucemia de $10\ \mu\text{m}$ [75] e microesferas [76]. Choe e colaboradores [13] descreveram um aprisionamento acústico de microesferas variando de diâmetro entre 70 a $90\ \mu\text{m}$ utilizando um transdutor equipado com uma lente de Fresnel

multifocal gerando um feixe de Bessel de ordem zero de 17.9 MHz. Um transdutor foi fabricado por Hsu e colaboradores [77] com frequência central de 57.5 MHz aprisionando micropartículas de poliestireno de 15 μm de diâmetro. Ondas de Bessel estacionária foram gerados por um conjunto de 64 elementos operando a 2.35 MHz organizados em círculos para manipular micropartículas de poliestireno de 90 μm de diâmetro em 2D [15].

1.2.3 Acustofluídica

A microfluídica pode ser definida como a ciência que opera em pequenos fluidos suspensos em canais de cortes transversais com dimensões micrométricas. Acustofluídica, ou seja, uma técnica que utiliza campos acústicos em micropartículas suspensas em microfluídica, tem atraído uma atenção especial porque permite uma separação de partículas baseadas nas propriedades mecânicas, tais como, tamanho, forma, densidade e compressibilidade. Dispositivos no domínio de acustofluídica são, em geral, baseados em ondas estacionárias [14, 78]. Ondas acústicas estacionárias tornou-se um método padrão para manipulação de células e partículas em chips microfluídicos [5],[79]–[82].

Ondas acústicas estacionárias de superfície têm sido utilizadas para aprisionar partículas com diâmetro menor que 16 μm suspensas em canais microfluídicos [7]–[12],[83]. Com o desenvolvimento de sistemas microfluídicos e o conceito da tecnologia de laboratório dentro de um chip (lab-on-a-chip), o movimento de partículas resultante da força de radiação acústica têm promovido uma revolução em aplicações biomédicas [5],[8]–[12]. Nessas aplicações é comum que as partículas tratadas possuam dimensões muito menores do que o comprimento de onda acústica. Isto corresponde ao chamado regime de espalhamento Rayleigh. Este limite é facilmente encontrado em dispositivos de acustofluídica operando em 2 MHz e manipulação de partículas tão pequenas quanto 1 μm em um meio como a água.

1.3 Motivação

Células biológicas ou polímeros se comportam como partículas sólidas viscoelásticas [84]. Portanto, uma investigação mais ampla sobre como a viscoelasticidade da partícula afeta a força e o torque de radiação acústico na aproximação de Rayleigh é desejada. Isso nos deu a motivação para analisar teoricamente esses fenômenos atuantes em pequenas partículas viscoelásticas considerando ondas planas progressivas e estacionárias e feixes de Bessel de ordem zero e primeira ordem. Assumimos que os efeitos termo-viscosos são negligenciados nos problemas de força e torque de radiação. Assim, o fluido é considerado como não-viscoso. Esta suposição requer que o raio da partícula e o comprimento de onda incidente devem ser muito maiores do que as camadas limite térmica $\delta_t = \sqrt{2D_t/\omega}$ e viscosa $\delta_v = \sqrt{2\nu_0/\omega}$ na superfície da partícula [85], onde D_t é a difusividade térmica, ω é a frequência angular e ν_0 é a viscosidade cinética. Além disso, nosso estudo pode permitir novos avanços nas técnicas de acustoforética.

1.4 Artigos e publicações

Artigos submetidos para publicação

J. P. Leão-Neto and G. T. Silva, Acoustic radiation force and torque exerted on a small viscoelastic particle in an ideal fluid, arXiv:physics.class-ph/1508.01908, 25 páginas, 5 figuras. Submetido ao *Journal of Sound and Vibration*, 2015.

Trabalhos em Congressos

1. J. P. L. Neto, G. T. Silva, Acoustic radiation force and torque on a fractional viscoelastic particle. 2015. (XXXVIII ENFMC Brazilian Physical Society Meeting).
2. J. P. L. Neto, G. T. Silva, Induced radiation force and torque on a viscoelastic particle in an ideal fluid. 2015. (170th Meeting of the Acoustical Society of America).

1.5 Apresentação geral do trabalho

Este trabalho é voltado ao estudo teórico da força e do torque de radiação acústico sobre uma partícula viscoelástica suspensa em um fluido ideal. Em particular, o modelo de Kelvin-Voigt fracionário é utilizado para descrever a propagação de ondas em partículas viscoelásticas [86]. Este modelo foi escolhido porque pode descrever a dependência da lei de potência da frequência observados experimentalmente em diversos materiais viscoelásticos [87]–[89]. No capítulo 2 derivamos as equações de onda de cisalhamento e longitudinal decorrentes da relação de estresse-deformação com base no modelo de Kelvin-Voigt fracionário [86, 90], ou seja, a lei de Hooke generalizada, assumindo que as componentes do estresse são linearmente relacionadas com as componentes da deformação, com termos de derivada fracionária no tempo.

No capítulo 3 apresentamos a teoria de espalhamento da onda acústica por uma partícula esférica. É importante ressaltar que a teoria de espalhamento está diretamente ligada aos fenômenos de força e torque de radiação acústico [41]. Na seção 3.2, derivamos os coeficientes de espalhamento adimensional para a aproximação de monopolo e dipolo que será utilizado nas fórmulas de expansão de onda parcial para força e torque de radiação acústico.

No capítulo 4, nós descrevemos como obter as fórmulas de força e torque de radiação acústico para a aproximação monopolo-dipolo. Para simplificar ainda mais essas fórmulas, expandimos na seção 4.4, a relação de dispersão viscoelástica em série de Taylor nas aproximações de baixa e alta frequência.

Aplicamos o desenvolvimento da teoria no capítulo 5 para estudar o comportamento das partículas de polietileno de baixa e alta densidade interagindo com ondas acústicas. Na seção 5.1, apresentamos expressões analíticas para força e torque de radiação acústico exercido sobre uma partícula viscoelástica por ondas planas propagantes e estacionárias, feixes de Bessel de ordem zero e primeira ordem. Resultados teóricos anteriores para as partículas feitas de outros materiais (partícula fluida e sólida) são recuperados. Nós estabelecemos a condição de obter força e torque de radiação acústico negativo em termos dos tempos de relaxação longitudinal e de cisalhamento da partícula.

Por fim, apresentamos no capítulo 6 as principais conclusões deste trabalho a partir dos resultados obtidos, bem como as nossas perspectivas para o desenvolvimento de novos trabalhos.

2

Equações do modelo

Em geral, a matéria apresenta-se no estado sólido ou fluido. O termo “fluido” pode ser usado para um gás ou um líquido. A compreensão dos princípios básicos da física dos fluidos e sólidos são de suma importância na análise de sistemas em que os mesmos são meios atuantes. Tanto fluidos como sólidos clássicos obedecem a conservação de massa, do momento e de energia. Neste capítulo, as equações de dinâmica do fluido são derivadas das relações fundamentais que descrevem a taxa de variação das densidades de fluxo de massa, momento e energia. Apresentaremos também como uma onda se propaga em um fluido ideal, considerando que a equação de onda correspondente é conhecida como equação de Helmholtz. A solução desta equação em coordenadas esféricas é apresentada em termos do método de onda parcial para todas as ondas envolvidas no problema. Além disso, apresentaremos também as equações de conservação para sólidos. E por fim, expandimos nossa análise considerando a propagação de onda em um sólido viscoelástico através do modelo Kelvin-Voigt. Esses estudos da propagação de ondas em um determinado meio (fluido ou sólido) serão importantes para compreender a teoria de espalhamento acústico que será apresentada no próximo capítulo.

2.1 Equações de conservação para um fluido ideal

Apesar de gases e líquidos serem compostos de átomos e moléculas, é útil considerá-los como meios contínuos. Considere um fluido ideal, cujas propriedades macroscópicas são constantes. Uma maneira de descrever o movimento de um fluido é por meio de um elemento de fluido que está fixo no espaço com relação a um sistema de coordenadas em qualquer instante de tempo t . Iremos considerar um elemento de fluido arbitrário de volume V_0 fixo no espaço e localizado em uma posição \mathbf{r} contendo um número suficientemente grande de átomos ou moléculas que encontram-se em equilíbrio termodinâmico local. Isto nos permite definir grandezas físicas para o elemento de fluido, tais como densidade, velocidade, pressão, energia interna e entropia.

Neste capítulo, faremos o uso recorrente do teorema da divergência de Gauss para um determinado campo vetorial $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ que é dado por

$$\int_{V_0} \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \int_{S_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}, \quad (2.1)$$

onde \mathbf{n} é o vetor unitário normal que aponta para fora da superfície S_0 , $d^2\mathbf{r}$ e $d^3\mathbf{r}$, são os elementos de integração de área e de volume, respectivamente.

2.1.1 Equação de conservação da massa

Considere um volume fixo V_0 de um elemento de fluido localizado na posição \mathbf{r} . Assumimos que o elemento de fluido contém N átomos ou moléculas em um instante de tempo t . Então, podemos definir a densidade $\rho(\mathbf{r}, t)$ da seguinte forma:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^{N(t)} m_i, \quad (2.2)$$

onde m_i é a massa de um átomo ou molécula dentro do elemento de volume V_0 . A velocidade do centro de massa do elemento de volume V_0 do fluido para qualquer instante de tempo t é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{r}, t)V_0} \sum_{i=1}^{N(t)} m_i v_i. \quad (2.3)$$

onde \mathbf{v} é conhecido como a velocidade do elemento de fluido, e v_i é a velocidade do i -ésimo átomo ou molécula dentro do elemento de volume V_0 .

Dentro de um fluido, a massa não pode ser criada ou destruída, então a massa total pode variar apenas devido ao fluxo de massa. O fluxo de massa por unidade de área por unidade de tempo (com unidade $\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$) é definido como densidade $\rho(\mathbf{r}, t)$ vezes a velocidade de convecção $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Assim, a variação da massa total do volume V_0 por unidade de tempo depende do fluxo de massa $\rho\mathbf{v}$ através da superfície S_0 e do volume V_0 , figura (2.1). Portanto, a conservação de massa exige que

$$\partial_t \int_{V_0} \rho d^3\mathbf{r} + \int_{S_0} \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = 0, \quad (2.4)$$

onde $\partial_t = \partial/\partial t$. Uma vez que o volume V_0 é fixo, a derivada temporal ∂_t pode ser calculada diretamente na função densidade. Por outro lado, podemos utilizar o teorema da divergência de Gauss, Eq. (2.1), na integral de superfície da Eq. (2.4) para transformar essa integral em uma integral de volume,

$$\int_{S_0} \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) d^3\mathbf{r}. \quad (2.5)$$

Substituindo a equação (2.5) na equação (2.4), obtemos

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho\mathbf{v} = 0, \quad (2.6)$$

que corresponde a equação de conservação da massa.

2.1.2 Equação de conservação do momento

O momento linear dentro de um volume fixo V_0 para qualquer instante de tempo t é $\rho\mathbf{v}$. Da mesma forma que a variação da massa, o momento linear pode variar devido à convecção. Nesse caso, o fluxo de momento é definido como $\rho\mathbf{v}\mathbf{v}$. A variação da taxa do momento linear em um volume V_0 deverá ser igual a soma das contribuições do fluxo de momento, da força devido a pressão normal a superfície S_0 e das forças volumétricas, que são forças externas que atuam ao longo de todo o volume do fluido, podemos citar como exemplo dessas forças volumétricas a força gravitacional e a força elétrica. Assim, a variação da taxa do momento linear no volume V_0 para um fluido ideal é dado por

$$\partial_t \int_{V_0} \rho\mathbf{v} d^3\mathbf{r} + \int_{S_0} p \mathbf{n} d^2\mathbf{r} + \int_{S_0} \rho\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V d^3\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

onde a quantidade $\mathbf{v}\mathbf{v}$ é um diade (tensor de segunda ordem), $p(\mathbf{r}, t)$ é a pressão em \mathbf{r} e \mathbf{f}^V é a densidade de força volumétrica. Podemos utilizar o teorema de Gauss para tensores [91] com intuito de transformar as integrais de superfícies da Eq. (2.7) em integrais volumétricas. Consequentemente, a equação de conservação do momento na forma integral é dada por

$$\partial_t \int_{V_0} \rho\mathbf{v} d^3\mathbf{r} + \int_{V_0} \nabla p \mathbf{n} d^3\mathbf{r} + \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) d^3\mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V d^3\mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

Como o volume V_0 é arbitrário, encontramos a equação diferencial parcial da conservação do momento

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla p + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) + \mathbf{f}^V = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

No caso particular, em que as forças volumétricas \mathbf{f}^V são muito menores que as outras forças da Eq. (2.9), podemos considerar que $\mathbf{f}^V = \mathbf{0}$. Além disso, definimos o tensor de tensões para um fluido não-viscoso como

$$\mathbf{S} = p\mathbf{I} + \rho\mathbf{v}\mathbf{v}, \quad (2.10)$$

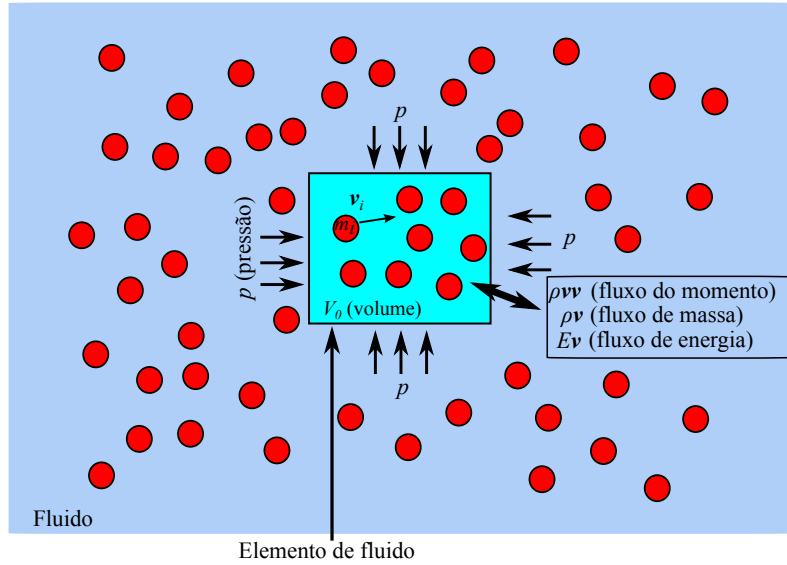
onde o gradiente da pressão pode ser expresso em termos de um tensor de segunda ordem como $\nabla p = \nabla \cdot (p\mathbf{I})$, com \mathbf{I} sendo o tensor unitário. Portanto, podemos reescrever a Eq. (2.9) da seguinte forma:

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Essa é a equação de conservação do momento linear que iremos utilizar para derivação da equação de onda linear na próxima seção. Porém, é útil reescrever essa equação em um novo formato que será utilizada na demonstração da fórmula de força no capítulo 4. Considere a relação matemática,

$$\nabla \cdot \rho\mathbf{v}\mathbf{v} = (\nabla \cdot \rho\mathbf{v})\mathbf{v} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}. \quad (2.12)$$

Figura 2.1: Forças atuando sobre as partículas de massa m_i e velocidade v_i que ocupam um elemento de fluido de volume $V_0(t)$.



Fonte: Autor, 2015.

Usando a equação de conservação da massa, Eq. (2.6) dentro dessa relação acima, temos

$$\nabla \cdot \rho v v = -(\partial_t \rho) v + \rho v \cdot \nabla v. \quad (2.13)$$

Substituindo essa relação na equação de conservação do momento, Eq. (2.11), obtemos

$$\rho D_t v = -\nabla p, \quad (2.14)$$

onde o operador $D_t \equiv (\partial_t + v \cdot \nabla)$ é a derivada temporal material. Essa é uma outra forma de escrever a equação do movimento.

2.1.3 Conservação da energia

A última equação de conservação para um fluido ideal a ser apresentada é governada por leis da termodinâmica e por convecção. Ao trabalhar com termodinâmica dos fluidos é conveniente utilizar quantidades termodinâmicas por unidade de massa. Desta forma, usaremos a letra u para denominar a energia interna por unidade de massa de um volume fixo V_0 , e a letra s para denominar a entropia por unidade de massa. A primeira lei da termodinâmica relaciona o aumento da energia interna com o trabalho realizado sobre o elemento de volume, e o calor $T ds$ da seguinte forma:

$$du = T ds - p d(\rho^{-1}) = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (2.15)$$

onde T é a temperatura. Assumiremos que o transporte de calor no fluido é lento comparado com a propagação acústica. Desta forma, em um processo adiabático ($ds = 0$),

a primeira lei da termodinâmica torna-se $du = p\rho^{-2}d\rho$. Assim, tanto a energia interna como a pressão pode ser expressa como pela equação de estado em função da densidade,

$$p = p(\rho), \quad (2.16)$$

$$u = u(\rho). \quad (2.17)$$

A densidade de energia em um volume V_0 é dada pela soma da densidade de energia cinética e a densidade de energia interna,

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho v^2(\mathbf{r}, t)}{2} + \rho u(\mathbf{r}, t). \quad (2.18)$$

De maneira análoga a variação do momento linear, Eq. (2.7), a densidade de energia em um fluido de volume V_0 pode variar por convecção através da superfície S_0 e devido a variação do trabalho realizado por uma força gerada pela pressão na superfície S_0 . A densidade de energia de convecção é dada em termos do fluxo de energia $(\rho v^2/2 + \rho u)\mathbf{v}$, enquanto a variação do trabalho devido a pressão é $p\mathbf{v}$ (veja figura 2.1). Portanto, a variação da taxa da densidade de energia em um volume V_0 para um fluido ideal é dada por

$$\partial_t \int_{V_0} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) d^3\mathbf{r} + \int_{S_0} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} + \int_{S_0} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = 0. \quad (2.19)$$

Fazendo novamente o uso do teorema da divergência de Gauss, e como o volume V_0 é arbitrário, encontramos a equação da conservação de energia,

$$\partial_t \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u + p \right) \mathbf{v} \right] = 0, \quad (2.20)$$

Observe que a quantidade entre colchetes é identificado como vetor fluxo de energia.

2.2 Propagação da onda no fluido ideal

A equação da onda que representa a dinâmica de propagação da onda em um fluido ideal é derivada da combinação da equação de estado da pressão em termos da densidade (2.16), da equação de conservação da massa (2.6) e da equação de conservação do momento (2.11). Considere um fluido homogêneo, cuja densidade ambiente ρ_0 e a pressão ambiente p_0 são constantes. Além disso, expandimos a pressão, que depende da densidade, em série de Taylor em torno de ρ_0 . Neste caso, escrevemos a série da seguinte maneira:

$$p - p_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (\rho - \rho_0)^n \frac{(\partial_{\rho}^n p)_{\rho_0}}{n!}, \quad (2.21)$$

onde $\partial_{\rho} = \partial/\partial\rho$ designa variações de pressão com a densidade do fluido, ou seja, ondas de pressão, que por definição é o som. Assim, a derivada parcial de primeira ordem $(\partial_{\rho} p)_{\rho_0}$

tem dimensão de velocidade ao quadrado. Portanto, a velocidade do som é definida da seguinte maneira,

$$c_0^2 = (\partial_\rho p)_{\rho_0}. \quad (2.22)$$

O conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares que descrevem a dinâmica da onda em um fluido ideal são notoriamente de difícil resolução analítica. No entanto, soluções aproximadas são úteis e podem ser encontradas utilizando o método de aproximações sucessivas. Neste método, a pressão, densidade e a velocidade são expandidas em potências de um pequeno parâmetro M . Esse parâmetro de expansão M é o número de Mach, que é a medida adimensional da velocidade definida como

$$M = \frac{v_0}{c_0}, \quad (2.23)$$

onde v_0 é magnitude máxima da velocidade do elemento do fluido e c_0 é a velocidade do som no fluido. Portanto, nossa análise está condicionada a um regime de velocidade muito baixa, $M \ll 1$. Desta forma, a pressão, a densidade e a velocidade são escritas da seguinte forma:

$$p - p_0 = \sum_{n=1}^{\infty} M^n p^{(n)}, \quad (2.24)$$

$$\rho - \rho_0 = \sum_{n=1}^{\infty} M^n \rho^{(n)}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^{\infty} M^n \mathbf{v}^{(n)}, \quad (2.26)$$

onde o índice n identifica a ordem da expansão. Para a derivação do problema de espalhamento, a aproximação linear dos campos acústicos é suficiente. No entanto, para a derivação da força e torque de radiação será necessário utilizar campos acústicos de segunda ordem, essa análise será apresentada no capítulo 4.

2.2.1 Equação linear da onda

As pequenas perturbações acústicas, no qual o parâmetro de perturbação é $M \ll 1$, podem ser descritas pela aproximação linear dos campos de pressão, densidade e velocidade do elemento de fluido

$$p - p_0 = M p^{(1)}, \quad (2.27)$$

$$\rho - \rho_0 = M \rho^{(1)}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{v} = M \mathbf{v}^{(1)}. \quad (2.29)$$

Substituindo as Eqs. (2.27) e (2.28) na equação (2.21) para $n = 1$, encontramos que a aproximação linear da expansão da pressão em função da densidade é dada por

$$p^{(1)} = c_0^2 \rho^{(1)}. \quad (2.30)$$

Agora considerando as equações de conservação da massa (2.6) e conservação de momento (2.11), substituímos novamente as Eqs. (2.27), (2.28) e (2.29), mantendo somente os termos de primeira ordem de M e eliminando a densidade através da Eq. (2.30), obtemos

$$\frac{1}{c_0^2} \partial_t p^{(1)} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 0, \quad (2.31)$$

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v}^{(1)} + \nabla p^{(1)} = \mathbf{0}. \quad (2.32)$$

Essas equações são as equações lineares de dinâmica dos fluidos.

Tomando o rotacional da Eq. (2.32), encontramos que a velocidade do elemento do fluido é irrotacional,

$$\nabla \times \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad (2.33)$$

onde esse resultado é obtido devido ao fato de que o rotacional do gradiente é sempre nulo. Assim, podemos introduzir uma função potencial escalar $\phi(\mathbf{r}, t)$ para a velocidade do elemento do fluido é dado da seguinte forma:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \nabla \phi. \quad (2.34)$$

A pressão é dada em termos do potencial de velocidade a partir da Eq. (2.32)

$$p^{(1)} = -\rho_0 \partial_t \phi. \quad (2.35)$$

Substituindo a velocidade do elemento de fluido e a pressão em termos do potencial de velocidade na Eq. (2.31), encontramos a equação linear da onda para o potencial de velocidade,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \right) \phi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.36)$$

É fácil observar que tanto a pressão como a velocidade do elemento do fluido satisfazem a equação linear da onda.

2.2.2 Equação de Helmholtz

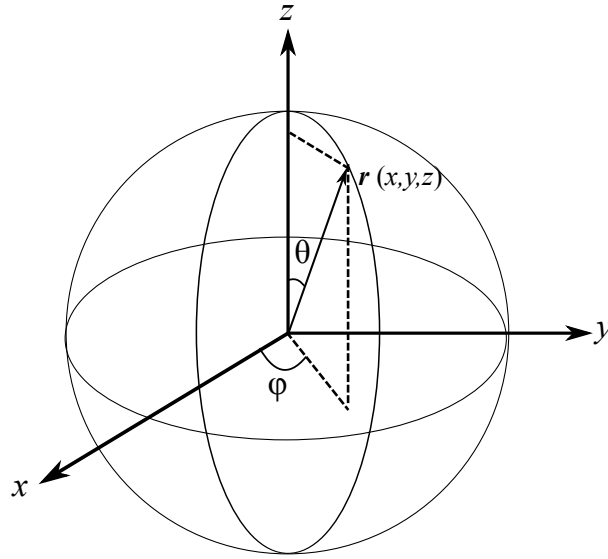
Os fenômenos de força e torque de radiação são relacionados com os campos acústicos (pressão, densidade, velocidade) que tenham variação temporal harmônica com frequência angular $\omega = 2\pi f$, onde f é a frequência. Assim, a velocidade do elemento do fluido é dada por $\phi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$. Então a equação linear da onda (2.36) pode ser expressa como a equação de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)\phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.37)$$

onde $k = \omega/c$ é o número de onda e $\phi(\mathbf{r})$ é a amplitude determinada por condições de contorno específicas de um determinado problema acústico.

O sistema de coordenadas escolhido para obter a solução da equação de Helmholtz depende do problema que será estudado. Para o problema de espalhamento acústico escolheremos o sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) , onde r é a distância radial, θ é o

Figura 2.2: Coordenadas esféricas (r, θ, φ) : r é a distância radial, θ é o ângulo polar e φ é o ângulo azimutal.



Fonte: Autor, 2015.

ângulo polar e φ é o ângulo azimutal, conforme ilustrado na figura (2.2).

A regra de transformação de coordenadas esféricas em cartesianas pode ser descrita desta forma:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad (2.38)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad (2.39)$$

$$z = r \cos \theta, \quad (2.40)$$

onde θ é medido a partir do eixo z positivo com $0 \leq \theta \leq \pi$ e φ no plano xy com $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

2.2.3 Solução da equação de Helmholtz

Utilizando o laplaciano em coordenadas esféricas, a equação de Helmholtz (2.37) assume a seguinte forma:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \phi + k^2 \phi = 0. \quad (2.41)$$

O modo mais simples de resolver essa equação diferencial parcial é subdividi-la em um conjunto de equações diferenciais ordinárias, faremos isso usando o método de separação de variáveis em coordenadas esféricas da seguinte forma:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad (2.42)$$

onde $R(r)$, $\Theta(\theta)$, $\Phi(\varphi)$ são funções arbitrárias radial, polar e azimutal. Substituindo a

Eq. (2.42) na Eq. (2.41) e dividindo por $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, temos

$$\frac{1}{Rr^2}d_r(r^2d_rR) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta}d_\theta(\sin \theta d_\theta \Theta) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta}d_\varphi^2 \Phi + k^2 = 0, \quad (2.43)$$

onde $d_r = d/dr$, $d_\theta = d/d\theta$ e $d_\varphi^2 = d^2/d\varphi^2$. Observe que, todas as derivadas agora são derivadas ordinárias, não mais parciais. Multiplicando por $r^2 \sin^2 \theta$, podemos encontrar,

$$\frac{1}{\Phi}d_\varphi^2 \Phi = r^2 \sin^2 \theta \left[-k^2 - \frac{1}{Rr^2}d_r(r^2d_rR) - \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta}d_\theta(\sin \theta d_\theta \Theta) \right]. \quad (2.44)$$

É importante verificar que a Eq. (2.44) relaciona uma função apenas de φ a uma função de r e de θ apenas. Como r, θ e φ são variáveis independentes, podemos igualar cada lado da Eq. (2.44) a uma constante.

$$\frac{1}{\Phi}d_\varphi^2 \Phi(\varphi) = -m^2, \quad (2.45)$$

$$r^2 \sin^2 \theta \left[-k^2 - \frac{1}{Rr^2}d_r(r^2d_rR) - \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta}d_\theta(\sin \theta d_\theta \Theta) \right] = -m^2, \quad (2.46)$$

onde m deve ser um inteiro, cujo o valor depende dos detalhes do problema. Multiplicando a Eq. (2.46) por r^2 e rearrumando os termos, obtemos

$$r^2k^2 + \frac{1}{R}d_r(r^2d_rR) = -\frac{1}{\Theta \sin \theta}d_\theta(\sin \theta d_\theta \Theta) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta}. \quad (2.47)$$

De maneira similar, cada lado da equação pode ser igualado a uma constante, assim obtemos,

$$\frac{1}{\sin \theta}d_\theta(\sin \theta d_\theta \Theta) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta + n(n+1)\Theta = 0 \quad (2.48)$$

$$k^2R + \frac{1}{r^2}d_r(r^2d_rR) - \frac{n(n+1)R}{r^2} = 0, \quad (2.49)$$

onde n da mesma forma que m deve ser um inteiro que pode ser determinado.

A solução da Eq. (2.45) é dada por

$$\Phi(\varphi) = \Phi_1 e^{im\varphi}, \quad (2.50)$$

onde Φ_1 é uma constante e m é um inteiro de modo que a solução é a mesma para φ e $\varphi + 2\pi$.

Para encontrar a solução da Eq. (2.48), precisamos fazer uma substituição de variável $\eta = \cos \theta$. De modo que, a Eq.(2.48) torna-se

$$d_\eta [(1 - \eta^2)d_\eta \Theta(\eta)] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] \Theta(\eta) = 0. \quad (2.51)$$

A Eq. (2.51) é identificada como a equação associada de Legendre, cuja a solução é dada

por

$$\Theta(\theta) = \Theta_1 P_n^m(\cos \theta), \quad (2.52)$$

onde $P_n^m(\cos \theta)$ são as funções associadas de Legendre e Θ_1 é uma constante.

As funções angulares Θ e Φ são frequentemente combinadas em uma função conhecida como harmônicos esféricos Y_n^m , onde

$$Y_n^m(\theta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad n \geq 0, -n \leq m \leq n. \quad (2.53)$$

A equação radial (2.49) é conhecida como equação esférica de Bessel, cuja a solução é dada por

$$R(r) = R_1 j_n(kr) + R_2 y_n(kr), \quad (2.54)$$

onde j_n e y_n são funções esféricas de Bessel e Neumann de ordem n , R_1 e R_2 são constantes. Podemos escrever essa solução de forma alternativa como [92]

$$R(r) = R_3 h_n^{(1)}(kr) + R_4 h_n^{(2)}(kr), \quad (2.55)$$

onde $h_n^{(1)}$ e $h_n^{(2)}$ são funções esféricas de Hankel de primeiro e segundo tipo e de ordem n , e R_3 , R_4 são constantes.

Uma vez que obtivemos as soluções separadas das funções radial, polar e azimutal, a solução geral da equação de Helmholtz dada pela Eq. (2.42) torna-se

$$\phi(kr, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{nm} j_n(kr) + b_{nm} y_n(kr)] Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (2.56)$$

De modo alternativo, podemos escrever a solução como

$$\phi(kr, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [s_{nm} h_n^{(1)}(kr) + c_{nm} h_n^{(2)}(kr)] Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (2.57)$$

onde a_{nm} , b_{nm} , s_{nm} e c_{nm} são coeficientes que serão determinados através das condições de contorno específicas de um problema acústico.

2.3 Equações de conservação para sólidos

Nesta seção, apresentaremos as equações básicas para um sólido elástico (conservação da massa, do momento e de energia), incluindo os conceitos de deformação e o desenvolvimento das relações constitutivas. As equações apresentadas nesta seção serão referidas em sistema de coordenadas cartesianas x_i ($i = 1, 2, 3$), permitindo que as complexidades do cálculo tensorial seja evitado.

2.3.1 Deformação

Considere um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 sujeito a uma deformação. Na situação inicial, o ponto P_0 está localizado pelo vetor $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$. Um ponto P_1 situado na vizinhança de P_0 , encontra-se localizado pelo vetor $d\mathbf{R}$ em relação a P_0 . Após a deformação, o volume e a superfície serão denominados por V'_0 e S'_0 , o ponto P_0 será representado por P'_0 e estará localizado pelo vetor $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$. O ponto P_1 será representado por P'_1 que estará localizado pelo vetor $d\mathbf{x}$ em relação a P'_0 , como mostra a figura (2.3). O deslocamento de P_0 para P'_0 é medido pelo vetor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Desta forma, as relações entre os vetores mostrado na figura (2.3) são dadas por

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{w}, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{w} + d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + \mathbf{W}. \quad (2.59)$$

No entanto, da Eq. (2.58), obtemos que $d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + d\mathbf{w}$. Utilizando essa expressão, podemos reescrever a Eq. (2.59) como

$$\mathbf{W} = \mathbf{w} + d\mathbf{w}. \quad (2.60)$$

Além disso, podemos expressar dw_i da seguinte forma:

$$dw_i = \partial_j w_i dx_j \quad (2.61)$$

onde $\partial_j = \partial/\partial x_j$. Essa equação pode ser apresentada na forma

$$dw_i = \frac{1}{2}(\partial_j w_i + \partial_i w_j)dx_j + \frac{1}{2}(\partial_j w_i - \partial_i w_j)dx_j. \quad (2.62)$$

Assim, podemos definir os tensores infinitesimais de deformação e rotação para pequenas deformações como

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j w_i + \partial_i w_j), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j w_i - \partial_i w_j), \quad (2.63)$$

na forma vetorial, a deformação é dado por

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T), \quad (2.64)$$

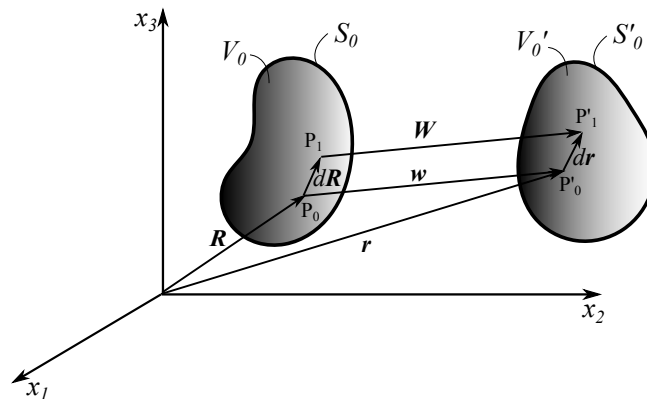
onde $\nabla \mathbf{w}$ é o tensor de segunda ordem e o sobrescrito T denota a transposta de um tensor.

O resultado da Eq.(2.62) mostra que a cinemática de um ponto arbitrário na vizinhança de P_0 é governada pelo campo gradiente local $\partial_j w_i$ e que o movimento é uma combinação de efeitos locais de distorção ϵ_{ij} e rotação de corpo rígido ω_{ij} .

2.3.2 Tensão

Considere um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 que sofre a ação de forças externas f_i ($i = 1, 2, 3$) como mostrado na figura (2.4). Quando um objeto é deformado

Figura 2.3: Deformação de um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 para o volume V'_0 e superfície S'_0 .



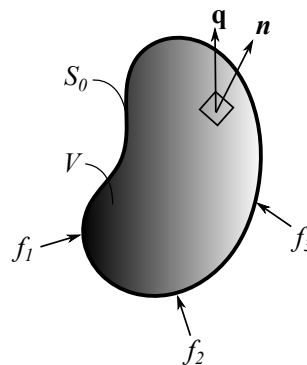
Fonte: Autor, 2015.

devido a essas forças, a disposição das moléculas é alterada e o corpo deixa de estar no seu estado de equilíbrio original. Como resultado dessas forças externas, o vetor de tração interno \mathbf{q} que tende a devolver o corpo ao equilíbrio vai atuar sobre um elemento de superfície arbitrária com o vetor normal \mathbf{n} a essa superfície, como mostrado na figura (2.4). O vetor tração é dado por

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \tag{2.65}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões e está diretamente relacionado com as forças internas que tendem a devolver o corpo ao equilíbrio. Desta forma, se não há deformação, não existe tensão interna.

Figura 2.4: Representação do vetor tração \mathbf{q} de um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 devido a forças externas $f_i (i = 1, 2, 3)$.



Fonte: Autor, 2015.

2.3.3 Conservação da massa

A massa contida em um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 para qualquer instante de tempo t é dada por

$$m = \int_{V_0} \rho_1 d^3\mathbf{r}, \quad (2.66)$$

onde $\rho_1 = \rho_1(\mathbf{r}, t)$ é a densidade de massa de um sólido. A conservação de massa requer que taxa de variação da massa seja nula, ou seja, $dm/dt = 0$. Assim,

$$\int_{V_0} [\partial_t \rho_1 d^3\mathbf{r} + \rho_1 \partial_t (d^3\mathbf{r})] = 0. \quad (2.67)$$

O deslocamento de uma partícula devido a uma deformação do volume V_0 após um instante de tempo dt é $\mathbf{v}dt$. Se \mathbf{n} é o vetor unitário normal a superfície S_0 , então o volume deslocado pelas partículas de um elemento de área $d^2\mathbf{r}$ na superfície S_0 é $d^3\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt d^2\mathbf{r}$. Portanto,

$$\int_{V_0} \partial_t \rho_1 d^3\mathbf{r} + \int_{S_0} \rho_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = 0. \quad (2.68)$$

Utilizamos o teorema da divergência de Gauss, Eq. (2.5), na integral de superfície para torná-la uma integral de volume, desta forma

$$\int_{V_0} \partial_t \rho_1 d^3\mathbf{r} + \int_{V_0} \nabla \cdot \rho_1 \mathbf{v} d^3\mathbf{r} = 0. \quad (2.69)$$

Como o volume V_0 é arbitrário, então a equação de conservação da massa é dada por

$$\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot \rho_1 \mathbf{v} = 0. \quad (2.70)$$

2.3.4 Conservação do momento

A variação da taxa do momento linear em um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 é igual a força total aplicada sobre esse volume. Para qualquer instante de tempo t , o momento linear no volume contínuo V_0 é $\rho_1 \mathbf{v}$. O corpo está sujeito a forças de superfícies e volumétricas. Assim, a taxa de variação do momento linear do corpo é dado por

$$\partial_t \int_{V_0} \rho_1 \mathbf{v} d^3\mathbf{r} = \int_{S_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V d^3\mathbf{r}, \quad (2.71)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões em um sólido. Resolvendo a derivada temporal na integral do lado esquerdo da igualdade, e lembrando que a derivada no tempo do elemento de volume é $\partial_t (d^3\mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}$, temos

$$\int_{V_0} (\mathbf{v} \partial_t \rho_1 + \rho_1 \partial_t \mathbf{v}) d^3\mathbf{r} + \int_{S_0} \rho_1 \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = \int_{S_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V d^3\mathbf{r}, \quad (2.72)$$

substituindo a equação (2.68) e $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{w}$ simplificamos o lado esquerdo da igualdade. Utilizando novamente o teorema de Gauss, Eq. (2.5), na integral de superfície podemos

reescrever essa equação da seguinte forma

$$\int_{V_0} (\rho_1 \partial_t^2 \mathbf{w} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}^V) d^3 \mathbf{r} = 0. \quad (2.73)$$

Como o volume V_0 é arbitrário, a equação da conservação do momento é dada por

$$\rho_1 \partial_t^2 \mathbf{w} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}^V = \mathbf{0}. \quad (2.74)$$

Para um caso particular, onde as forças volumétricas \mathbf{f}^V são muito menores que as outras forças da Eq. (2.74) podemos desprezá-las, desta forma reescrevemos a Eq. (2.74) da seguinte forma:

$$\rho_1 \partial_t^2 \mathbf{w} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.75)$$

Essa é a equação de conservação do momento para sólidos que iremos utilizar nas próximas seções.

2.3.5 Conservação da energia

A Conservação de energia estabelece que a variação da taxa da energia total é igual ao trabalho realizado sobre o corpo devido a todas as forças externas por unidade de tempo.

A energia cinética E_c é definida como

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{V_0} v^2 \rho_1 d^3 \mathbf{r}. \quad (2.76)$$

A energia interna U é definida como

$$U = \int_{V_0} u \rho_1 d^3 \mathbf{r}, \quad (2.77)$$

onde u é a energia interna por unidade de massa. Desta forma, a conservação de energia é dada por

$$\partial_t \int_{V_0} \left(\frac{1}{2} v^2 + u \right) \rho_1 d^3 \mathbf{r} = \int_{S_0} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{v} d^3 \mathbf{r}. \quad (2.78)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo dessa equação, temos

$$\begin{aligned} & \int_{V_0} \left[(\mathbf{v} \partial_t \mathbf{v} + \partial_t u) \rho_1 + \left(\frac{1}{2} v^2 + u \right) \partial_t \rho_1 \right] d^3 \mathbf{r} + \int_{S_0} \left(\frac{1}{2} v^2 + u \right) \rho_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} \\ &= \int_{S_0} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{v} d^3 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Aplicando o teorema de Gauss novamente nas integrais de superfície e organizando os

termos, obtemos

$$\int_{V_0} (\mathbf{v} \partial_t \mathbf{v} + \partial_t u) \rho_1 d^3 \mathbf{r} + \int_{V_0} \left(\frac{1}{2} v^2 + u \right) [\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot \rho_1 \mathbf{v}] d^3 \mathbf{r} = \int_{V_0} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} d^3 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^v \cdot \mathbf{v} d^3 \mathbf{r}. \quad (2.80)$$

Note que o termo entre colchetes é zero, pois trata-se da equação de conservação da massa (2.70), além disso substituindo $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{w}$ e reorganizando os termos, reescrevemos essa equação da seguinte forma

$$\int_{V_0} [(\rho_1 \partial_t^2 \mathbf{w} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}^v) \partial_t \mathbf{w} + (\rho_1 \partial_t u - \boldsymbol{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{v})] d^3 \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (2.81)$$

O primeiro parenteses é zero, pois trata-se da equação de conservação do momento (2.74), portanto a equação acima reduz para

$$\rho_1 \partial_t u - \boldsymbol{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.82)$$

Essa é a equação de conservação da energia para sólidos.

2.4 Modelo de Kelvin-Voigt

Em um material elástico, a tensão e a deformação estão relacionados pela rigidez, que é uma medida da resistência do material a deformação em resposta a uma força aplicada. Para um meio isotrópico, Cauchy generalizou a lei de Hooke assumindo que as componentes da tensão são linearmente relacionadas com as componentes da deformação. Desta forma, podemos escrever a equação tensorial na notação de Einstein, onde um índice repetido implica sempre um somatório sobre esse índice, da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (2.83)$$

onde o σ_{ij} é o tensor de tensões, ϵ_{kl} é o tensor deformação e C_{ijkl} é o tensor das constantes elásticas, ou módulos, do material e é chamado o tensor do módulo de elasticidade.

Para considerar o comportamento viscoelástico no qual a taxa de deformação dependente do tempo é observada em resposta a uma força aplicada, a Eq.(2.83) pode ser generalizada adicionando termos proporcionais a derivadas temporal da tensão e da deformação,

$$\left[1 + \sum_{m=1}^{M_1} A_{ijkl}^m \partial_t^m \right] \sigma_{ij} = \left[C_{ijkl} + \sum_{m=1}^{M_2} B_{ijkl}^m \partial_t^m \right] \epsilon_{kl}, \quad (2.84)$$

onde $\partial_t^m = \partial^m / \partial t^m$. Esta expressão é responsável para os quatro tipos de comportamento viscoelástico clássico (Kelvin-Voigt, Maxwell, Zener ou anti-Zener) dependendo dos valores de $A_{ijkl}^m, B_{ijkl}^m, M_1$ e M_2 . Quando $M_1 = 0$ e $M_2 = 1$, obtemos o modelo de Kelvin-Voigt [86],

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} + B_{ijkl} \partial_t \epsilon_{kl}. \quad (2.85)$$

Para desenvolver a relação tensão-deformação, Eq. (2.85), utilizamos o seguinte teorema: Um tensor isotrópico de quarta ordem D_{ijkl} pode ser escrito da seguinte forma [93]:

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \kappa (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.86)$$

onde λ , μ e κ são constantes e δ_{ij} é a função delta de Kronecker. Utilizando esse teorema para os tensores de quarta ordem da Eq.(2.85) a relação tensão-deformação do modelo Kelvin-Voigt pode ser escrita como

$$\sigma_{ij} = \lambda_e \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_e \epsilon_{ij} + \lambda_v \delta_{ij} \partial_t \epsilon_{kk} + 2\mu_v \partial_t \epsilon_{ij}, \quad (2.87)$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\sigma} = [(\lambda_e + \lambda_v \partial_t) \text{tr} \boldsymbol{\epsilon}] \mathbf{I} + 2(\mu_e + \mu_v \partial_t) \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.88)$$

onde, \mathbf{I} é o tensor unitário de segunda ordem, ‘tr’ significa o traço de um tensor, λ_e e μ_e são as constantes elásticas longitudinal e cisalhamento em unidades de Pa · s, enquanto que λ_v e μ_v são os coeficientes de viscosidade longitudinal e cisalhamento em unidades de Pa · s.

Utilizando o tensor de deformação Eq.(2.63) e a relação de tensão-deformação para um sólido viscoelástico isotrópico Eq.(2.87) na equação de conservação do momento Eq.(2.75), reescrevemos essa relação como função do deslocamento w ,

$$\rho_1 \partial_t^2 w_i = (\lambda_e + \mu_e) \partial_{ij}^2 w_j + \mu_e \partial_j^2 w_i + (\lambda_v + \mu_v) \partial_{ij}^2 \partial_t w_j + \mu_v \partial_j^2 \partial_t w_j \quad (2.89)$$

Na forma vetorial, essa equação é equivalente a

$$\rho_1 \partial_t^2 \mathbf{w} = (\lambda_e + \mu_e) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) + \mu_e \nabla^2 \mathbf{w} + (\lambda_v + \mu_v) \nabla (\nabla \cdot \partial_t \mathbf{w}) + \mu_v \nabla^2 \partial_t \mathbf{w}. \quad (2.90)$$

Agora, utilizamos a identidade vetorial $\nabla^2 \mathbf{w} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{w}$ para reescrever essa equação como

$$\partial_t^2 \mathbf{w} = c_\ell^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) - c_s^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{w} + \tau_\ell c_\ell^2 \nabla (\nabla \cdot \partial_t \mathbf{w}) - \tau_s c_s^2 \nabla \times \nabla \times \partial_t \mathbf{w}, \quad (2.91)$$

onde a velocidade do som longitudinal e cisalhamento são dadas por [94]

$$c_\ell = \sqrt{\frac{(\lambda_e + 2\mu_e)}{\rho_1}}, \quad (2.92)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho_1}}. \quad (2.93)$$

Além disso, os tempos de relaxação longitudinal e cisalhamento são convenientemente

definidos como

$$\tau_\ell = \left(\frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\rho_1 c_d^2} \right), \quad (2.94)$$

$$\tau_s = \left(\frac{\mu_v}{\rho_1 c_s^2} \right). \quad (2.95)$$

Notamos a natureza complexa da equação de movimento do deslocamento Eq.(2.91). Desta forma, é necessário escrever essa equação de forma mais simples, para isso faremos uso do teorema da decomposição de Helmholtz [95], expressando o vetor deslocamento \mathbf{w} em termos do potencial escalar ϕ_ℓ e do potencial vetor \mathbf{A} ,

$$\mathbf{w} = (\nabla\phi_\ell + \nabla \times \mathbf{A})e^{-i\omega t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.96)$$

onde ϕ_ℓ e \mathbf{A} são as amplitudes das funções potenciais escalar e vetor correspondentes as ondas longitudinais e de cisalhamento, respectivamente. Substituindo Eq. (2.96) na Eq. (2.91),

$$\nabla \left[\partial_t^2 \phi_\ell - c_\ell^2 \nabla^2 \phi_\ell - \tau_\ell c_\ell^2 \partial_t \nabla^2 \phi_\ell \right] e^{-i\omega t} + \nabla \times \left[\partial_t^2 \mathbf{A} - c_s^2 \nabla^2 \mathbf{A} - \tau_s c_s^2 \partial_t \nabla^2 \mathbf{A} \right] e^{-i\omega t} = 0. \quad (2.97)$$

Esta equação será satisfeita se cada termo entre parênteses desaparecer, assim podemos escrever a equação da onda em um sólido para cada potencial separadamente,

$$\left[\left(1 + \tau_\ell \partial_t \right) \nabla^2 - c_\ell^{-2} \partial_t^2 \right] \phi_\ell e^{-i\omega t} = 0, \quad (2.98)$$

$$\left[\left(1 + \tau_s \partial_t \right) \nabla^2 - c_s^{-2} \partial_t^2 \right] \mathbf{A} e^{-i\omega t} = 0. \quad (2.99)$$

Uma vez que a função potencial \mathbf{A} é um campo vetorial solenoidal, podemos expressá-lo em termo de dois potenciais escalares $\psi_{s,1}$ e $\psi_{s,2}$, isto é, os chamados potenciais escalares de Debye [96],

$$\mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{s,1}) + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{s,2}). \quad (2.100)$$

Assim, substituindo o potencial vetor Eqs. (2.100) nas equações de onda Eqs. (2.98) e (2.99), obtemos as equações de Helmholtz escalares

$$(\nabla^2 + k_\ell^2) \phi_\ell = 0, \quad (2.101)$$

$$(\nabla^2 + k_s^2) \begin{pmatrix} \psi_{s,1} \\ \psi_{s,2} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.102)$$

onde k_ℓ e k_s são os números de onda longitudinal e cisalhamento, respectivamente. As relações de dispersão das ondas longitudinal e cisalhamento são

$$k_j^2 = \left(\frac{\omega}{c_j} \right)^2 n_c^2(\omega\tau_j), \quad j \in \{\ell, s\}, \quad (2.103)$$

onde $n_c(\omega\tau_j)$ é reconhecido como o índice de refração complexo do material viscoelástico,

$$n_c(\omega\tau_j) = \frac{1}{\sqrt{1 + (-i\omega\tau_j)}}, \quad j \in \{\ell, s\}. \quad (2.104)$$

É útil definir o tempo de relaxação adimensional $\varepsilon_j = (\omega\tau_j)$. Além disso, podemos escrever o índice de refração complexo em termos de sua parte real n_R e parte imaginária $\tilde{\alpha}$,

$$n_c(\varepsilon_j) = n_R(\varepsilon_j) + i\tilde{\alpha}(\varepsilon_j). \quad (2.105)$$

Note que o meio é dispersivo e absorvedor, a parte imaginária está relacionada com quantidade $\tilde{\alpha}$ que corresponde a função de absorção adimensional, enquanto que a parte real está relacionada com dispersão, n_R será referido como o índice de refração do material.

2.5 Modelo de Kelvin-Voigt Fracionário

A partícula espalhadora é feita de um material sólido viscoelástico. Já está bem estabelecido que a absorção acústica de ondas longitudinais ou de cisalhamento em uma grande variedade de materiais viscoelásticos obedece a uma lei de potência da frequência [87]–[89]

$$\alpha(\omega) = \alpha_0\omega^{y_0}, \quad (2.106)$$

onde α_0 é o coeficiente de absorção e y_0 é o expoente da lei de potência que varia entre 0 e 2. Estes parâmetros estão relacionados com as propriedades do material viscoelástico.

Este modelo foi escolhido porque descreve a dependência da lei de potência da frequência observada experimentalmente em vários materiais viscoelásticos [87]–[89]. Desta forma, apresentamos uma generalização do modelo de Kelvin-Voigt apresentado anteriormente. Essa generalização é feita introduzindo um operador de cálculo fracionário, chamada de derivada fracionária, na relação entre a tensão e deformação. Desta forma, a Eq. (2.84) pode ser generalizada substituindo as derivadas temporais com expoentes inteiros por derivadas temporais fracionárias [86],

$$\left[1 + \sum_{m=1}^{M_1} A_{ijkl}^m \partial_t^{m+\nu-1} \right] \sigma_{ij} = \left[C_{ijkl} + \sum_{m=1}^{M_2} B_{ijkl}^m \partial_t^{m+\nu-1} \right] \epsilon_{kl}, \quad (2.107)$$

onde ∂_t^ν ($\nu > 0$) é o operador derivada fracionária temporal. Este operador atuando em uma função do tempo, $f(t)$, é definido aqui através da transformada de Fourier da seguinte forma [89]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\partial_t^\nu f(t)] e^{-i\omega t} dt = (-i\omega)^\nu F(\omega), \quad (2.108)$$

onde $F(\omega)$ é a transformada de Fourier. A derivada fracionária de ordem arbitrária ν pode ser entendida como uma generalização da derivada de m -ésima ordem, substituindo o número inteiro m por um número real ν .

Novamente, dependendo dos valores de M_1 e M_2 esta expressão é responsável por

quatro tipos de comportamento viscoelástico clássico. Para o caso, $M_1 = 0, M_2 = 1$, obtemos o modelo de Kelvin-Voigt fracionário [86],

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} + B_{ijkl}\partial_t^\nu \epsilon_{kl}. \quad (2.109)$$

Da mesma forma que o modelo Kelvin-Voigt, para o caso isotrópico, o modelo fracionário pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda_e \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_e \epsilon_{ij} + \lambda_v \delta_{ij} \partial_t^\nu \epsilon_{kk} + 2\mu_v \partial_t^\nu \epsilon_{ij}, \quad (2.110)$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\sigma} = [(\lambda_e + \lambda_v \partial_t^\nu) \text{tr} \boldsymbol{\epsilon}] \mathbf{I} + 2(\mu_e + \mu_v \partial_t^\nu) \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.111)$$

note que agora os coeficientes de viscosidade longitudinal λ_v e cisalhamento μ_v tem unidades de $(\text{Pa} \cdot \text{s}^\nu)$ devido a derivada fracionária. Seguindo os mesmos passos usados na seção 2.4, essa expressão também pode ser escrita como uma equação de onda para cada potencial separadamente,

$$\left[\left(1 + \tau_\ell^\nu \partial_t^\nu \right) \nabla^2 - c_\ell^{-2} \partial_t^2 \right] \phi_\ell e^{-i\omega t} = 0, \quad (2.112)$$

$$\left[\left(1 + \tau_s^\nu \partial_t^\nu \right) \nabla^2 - c_s^{-2} \partial_t^2 \right] \mathbf{A} e^{-i\omega t} = 0. \quad (2.113)$$

Agora, os tempos de relaxação longitudinal e cisalhamento são convenientemente definidos como

$$\tau_\ell = \left(\frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\rho_1 c_d^2} \right)^{1/\nu}, \quad (2.114)$$

$$\tau_s = \left(\frac{\mu_v}{\rho_1 c_s^2} \right)^{1/\nu}. \quad (2.115)$$

Note que $\nu = 1$, retornaremos ao modelo clássico de Kelvin-Voigt.

Para obter as equações para as amplitudes dos potenciais $\phi_\ell, \psi_{s,1}$ e $\psi_{s,2}$, pode-se mostrar a partir da Eq. (2.108) que $\partial_t^\nu e^{-i\omega t} = (-i\omega)^\nu e^{-i\omega t}$, e de maneira similar a seção 2.4 obtemos novamente as equações de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k_\ell^2) \phi_\ell = 0, \quad (2.116)$$

$$(\nabla^2 + k_s^2) \begin{pmatrix} \psi_{s,1} \\ \psi_{s,2} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.117)$$

Agora, com os índice de refração complexo do material viscoelástico das ondas longitudinal e de cisalhamento sendo escrita como

$$n_c(\omega\tau_j) = \frac{1}{\sqrt{1 + (-i\omega\tau_j)^\nu}}, \quad j \in \{\ell, s\}. \quad (2.118)$$

A solução da equação de Helmholtz é dada na seção 2.2.3. As amplitudes dos potenciais dentro da partícula deve ser funções regulares (finitas). Por isso, os potenciais longitudinal e cisalhamento de Debye são expressos na base de onda parcial como

$$\phi_\ell(k_\ell r, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} b_n a_{nm} j_n(k_\ell r) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (2.119)$$

$$\psi_{s,1}(k_s r, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} c_n a_{nm} j_n(k_s r) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (2.120)$$

$$\psi_{s,2}(k_s r, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} d_n a_{nm} j_n(k_s r) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (2.121)$$

onde, os coeficientes de expansão b_n , c_n , d_n e s_n serão determinados pela resolução do sistema linear obtido a partir das condições de contorno na superfície da partícula, que serão discutidas no próximo capítulo.

Neste capítulo, descrevemos as equações de conservação em um determinado meio, bem como a propagação da onda nesse meio e apresentamos a solução da equação de Helmholtz. Essas equações do modelo serão usadas no desenvolvimento desta tese.

No próximo capítulo vamos abordar os conceitos que fundamentam o espalhamento acústico por uma partícula esférica, e no capítulo 4, iremos apresentar um estudo sobre força e torque de radiação que utilizam os fundamentos de espalhamento.

Espalhamento acústico no limite de Rayleigh

Quando uma onda sonora encontra um obstáculo, parte da onda é desviada do seu caminho original. É usual definir a diferença entre a onda desviada e a onda não perturbada, que estaria presente se não houvesse o obstáculo, como onda espalhada.

Trabalhos pioneiros estabeleceram as bases teóricas para analisar o espalhamento em uma partícula esférica imersa em um fluido ideal, devido a onda plana incidente. O estudo pioneiro sobre espalhamento acústico foi desenvolvido por Lord Rayleigh [97]. Nesse estudo, Rayleigh considerou o caso limite no qual o espalhador (esfera rígida) é muito menor que o comprimento de onda. Um caso geral para espalhamento por uma esfera ou cilindro rígido foi desenvolvido por Morse [98], no qual a solução do espalhamento desenvolvida por ele não necessariamente considera que o espalhador é muito menor do que o comprimento de onda. Nesse estudo, o espalhador pode ser considerado aproximadamente do mesmo tamanho do comprimento de onda. Em geral, dependendo do material que é feito o espalhador, as ondas sonoras podem ser espalhadas e absorvidas. Desta forma, Morse e colaboradores generalizaram o estudo anterior, considerando os efeitos da onda longitudinal dentro de espalhadores fluidos (cilindro e esfera). A teoria de espalhamento para cilindro e esfera feito de material sólido elástico submerso em um fluido, que suportam ondas de cisalhamento e ondas longitudinais obteve avanços significativos através do trabalho pioneiro de J. Faran [99]. O espalhamento acústico a partir de uma esfera viscoelástica foi desenvolvido por Ayres e Gaunaurd [94], que considerou uma onda plana incidente sobre um objeto viscoelástico e utilizou o modelo de Kelvin-Voigt para modelar a propagação de ondas dentro da esfera.

Neste capítulo, apresentaremos a teoria de espalhamento acústico para uma partícula esférica feita de uma material sólido viscoelástico suspensa em um fluido ideal com uma onda acústica arbitrária.

3.1 Espalhamento por uma esfera viscoelástica

Considere uma onda acústica harmônica arbitrária com frequência angular ω propagando em um fluido homogêneo de densidade ρ_0 e velocidade do som c_0 . Uma partícula esférica de raio a e densidade ρ_1 feita de material viscoelástico está suspensa nesse fluido. Consideramos a partícula centrada na origem de um sistema de coordenadas como pode

ser visto na figura (3.1). Ao incidir uma onda sobre a partícula viscoelástica, parte da onda acústica é absorvida e parte é espalhada. As ondas incidente e espalhada são descritas em termos dos potenciais de velocidade $\phi_{\text{in}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ e $\phi_{\text{sc}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, respectivamente. As amplitudes dos potenciais de velocidade satisfazem a equação de onda de Helmholtz,

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{pmatrix} \phi_{\text{in}} \\ \phi_{\text{sc}} \end{pmatrix} = 0, \quad (3.1)$$

onde $k = \omega/c_0$ é o número de onda. Na aproximação linear, de acordo com as Eqs. (2.34) e (2.35), a pressão incidente (espalhada) e a velocidade do fluido são relacionados por

$$p_{\text{in(sc)}} = i\rho_0\omega\phi_{\text{in(sc)}}, \quad (3.2)$$

$$v_{\text{in(sc)}} = \nabla\phi_{\text{in(sc)}}. \quad (3.3)$$

Consideramos que a origem do sistema de coordenadas está situado no centro da partícula esférica. Devido à simetria do problema, descrevemos os potenciais incidente e espalhado como funções de coordenadas esféricas: distância radial r para o ponto observação $\mathbf{r} = (x, y, z)$, ângulo polar θ , e ângulo azimutal φ . Portanto, de acordo com a solução da equação de Helmholtz dada na seção (2.2.3), as amplitudes dos potenciais incidente e espalhado, podem ser expandido em uma série de ondas parciais da seguinte forma:

$$\phi_{\text{in}}(kr, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} a_{nm} j_n(kr) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (3.4)$$

$$\phi_{\text{sc}}(kr, \theta, \varphi) = \sum_{n,m} a_{nm} s_n h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (3.5)$$

onde $\sum_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n$, a_{nm} é o coeficiente de forma do feixe da onda incidente e s_n é o coeficiente de espalhamento escalar.

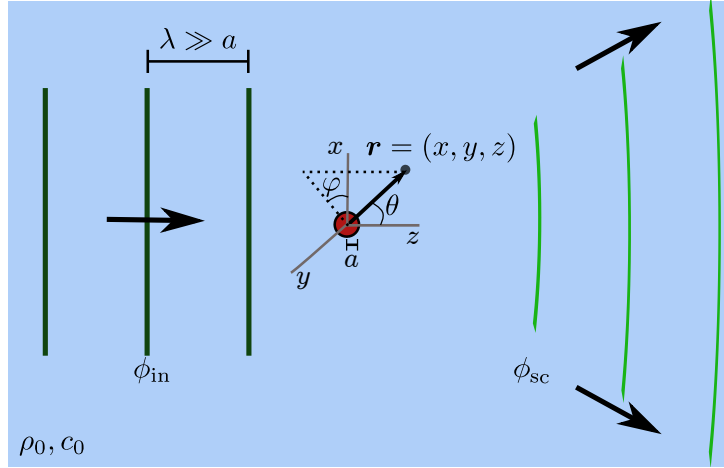
Para a onda incidente, estamos preocupados em encontrar a solução de uma onda que se propaga numa região que inclui a origem do sistema de coordenadas, por isso esta solução deve ser regular na origem (finita dentro da região de propagação). Por outro lado, para a onda espalhada não consideramos a região que inclui a origem do sistema de coordenadas. Além disso, note que a amplitude da onda espalhada ϕ_{sc} deve satisfazer a condição de radiação Sommerfeld no infinito,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r (\partial_r - ik) \phi_{\text{sc}} = 0. \quad (3.6)$$

Esta condição impõe que a onda espalhada não deve ser refletida no infinito.

O coeficiente de forma do feixe pode ser determinado em termos do potencial de velocidade incidente avaliados sobre uma superfície esférica de controle de raio $R \gg a$. Assim, multiplicando a Eq. (3.4) por $Y_n^{m*}(\theta, \varphi)$, integrando sobre um ângulo sólido ($\Omega =$

Figura 3.1: Um feixe incidente (barras verticais verde-escuro), com comprimento de onda λ e representado pela amplitude do potencial de velocidade ϕ_{in} , atinge uma pequena partícula viscoelástica (círculo vermelho) de raio a suspenso num fluido, com densidade ρ_0 e a velocidade de som c_0 . Um sistema de coordenadas cartesiana está situado no centro da partícula com um ponto de observação designado por $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Coordenadas esféricas (r, θ, φ) também são ilustrados. As ondas espalhadas (arcos verde claro) são representados pela amplitude do potencial de velocidade ϕ_{sc} . Setas pretas indicam as direções de propagação da onda.



Fonte: Autor, 2015.

$\sin \theta d\theta d\varphi$) e usando a relação de ortogonalidade dos harmônicos esféricos, obtemos

$$a_{nm} = \frac{1}{j_n(kR)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \phi_{\text{in}}(kR, \theta, \varphi) Y_n^{m*}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Por outro lado, o coeficiente de espalhamento escalar s_n será determinado aplicando as condições de contorno apropriadas sobre a interface fluido-viscoelástica na superfície da partícula.

A aproximação de campo distante ($kr \gg 1$) para a onda incidente é obtida substituindo a forma assintótica da função de Bessel esférica [100],

$$j_n(kr) \sim \frac{1}{kr} \sin(kr - n\pi/2), \quad (3.7)$$

na Eq. (3.4). Assim,

$$\phi_{\text{in}}(kr, \theta, \varphi) \sim \frac{1}{kr} \sum_{n,m} a_{nm} \sin(kr - n\pi/2) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (3.8)$$

A onda espalhada no campo distante ($kr \gg 1$), pode ser obtida substituindo a relação assintótica [100],

$$h_n^{(1)}(kr) \sim i^{-n-1} \frac{e^{ikr}}{kr}, \quad (3.9)$$

na Eq. (3.5). Desta forma, encontramos

$$\phi_{\text{sc}}(kr, \theta, \varphi) \sim -\frac{ie^{ikr}}{kr} \sum_{n,m} i^{-n} s_n a_{nm} Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (3.10)$$

A partícula, por ser composta de um material viscoelástico, permite absorção de ondas longitudinal e cisalhamento em seu interior. A propagação de ondas em um material viscoelástico foi apresentado na seção (2.5). As amplitudes dos potenciais dentro da partícula deve ser funções regulares (finitas). Por isso, os potenciais longitudinal e de cisalhamento de Debye são expressos na base de onda parcial como

$$\phi_\ell = \sum_{n,m} b_n a_{nm} j_n(k_\ell r) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (3.11)$$

$$\psi_{\text{s},1} = \sum_{n,m} c_n a_{nm} j_n(k_s r) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (3.12)$$

$$\psi_{\text{s},2} = \sum_{n,m} d_n a_{nm} j_n(k_s r) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (3.13)$$

onde k_ℓ , k_s são os números de onda longitudinal e de cisalhamento e b_n , c_n , d_n , s_n são os coeficientes de expansão que serão determinados pela resolução do sistema linear obtido a partir das condições de contorno na superfície da partícula.

As condições de contorno exigem que o tensor de tensão e o vetor de deslocamento devem ser contínuo em toda a superfície da partícula. Assim, na superfície da partícula $r = a$, temos:

- A componente radial do vetor deslocamento da partícula w_r na interface é igual à componente radial do deslocamento do fluido ideal $(i/\omega)(v_{\text{in},r} + v_{\text{sc},r})$. Assim, utilizando a Eq. (3.3), obtemos

$$w_r(a, \theta, \varphi) = \frac{i}{\omega} \partial_r [\phi_{\text{in}}(r, \theta, \varphi) + \phi_{\text{sc}}(r, \theta, \varphi)]|_{r=a}. \quad (3.14)$$

- A componente radial da tensão σ_{rr} na interface da partícula viscoelástica é igual à pressão externa no fluido ideal $(p_{\text{in}} + p_{\text{sc}})$. Desta forma, da Eq. (3.2), encontramos

$$\sigma_{rr}(a, \theta, \varphi) = -i\rho_0\omega[\phi_{\text{in}}(a, \theta, \varphi) + \phi_{\text{sc}}(a, \theta, \varphi)]. \quad (3.15)$$

- As componentes tangenciais da tensão de cisalhamento $\sigma_{r\theta}$ e $\sigma_{r\varphi}$ devem ser nulas na superfície da partícula,

$$\sigma_{r\theta}(a, \theta, \varphi) = 0, \quad (3.16)$$

$$\sigma_{r\varphi}(a, \theta, \varphi) = 0. \quad (3.17)$$

A componente radial do vetor deslocamento dentro da partícula em termos dos potenciais

escalares é obtida combinando a Eq. (2.96) com a Eq. (2.117), o resultado é

$$w_r = \partial_r [\phi_\ell + \partial_r(r\psi_{s,1})] + k_s^2 r \psi_{s,1}. \quad (3.18)$$

Por outro lado, para obter as componentes do tensor de tensão em coordenadas esféricas, derivamos o vetor deslocamento em termos dos potenciais escalares de Debye ϕ_ℓ , $\psi_{s,1}$ e $\psi_{s,2}$. Substituímos o resultado dentro da Eq. (2.64), obtemos o tensor de deformação ϵ . Finalmente, substituindo a deformação na Eq. (2.111) encontramos

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -[\lambda_e + (-i\omega\lambda_v)^\nu]k_\ell^2\phi_\ell + 2[\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu] \\ & \times [\partial_r^2(\phi_\ell + \partial_r(r\psi_{s,1})) + k_s^2\partial_r(r\psi_{s,1})], \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = & [\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu] \left\{ 2\partial_r \left[\frac{1}{r} \partial_\theta (\phi_\ell + \partial_r(r\psi_{s,1})) \right] \right. \\ & \left. + k_s^2 \left[\partial_\theta \psi_{s,1} + \frac{1}{\sin\theta} \partial_\varphi \left(\partial_r \psi_{s,2} - \frac{\psi_{s,2}}{r} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} = & [\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu] \left\{ \frac{2}{\sin\theta} \partial_r \left[\frac{1}{r} \partial_\varphi (\phi_\ell + \partial_r(r\psi_{s,1})) \right] \right. \\ & \left. + k_s^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \partial_\varphi \psi_{s,1} - \partial_\theta \left(\partial_r \psi_{s,2} - \frac{\psi_{s,2}}{r} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

As condições de contorno, Eqs.(3.14)-(3.17), são aplicadas utilizando a componente do vetor deslocamento Eq. (3.18), as componentes da tensão Eqs. (3.19)-(3.21) e os potenciais escalares Eqs. (3.4), (3.5) e (3.11)-(3.13). Assim, aplicando a primeira condição de contorno Eq. (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} b_n [nj_n(k_\ell r) - (k_\ell r)j_{n+1}(k_\ell r)] + c_n n(n+1)j_n(k_s r) = & \frac{i}{\omega} \{nj_n(kr) - (kr)j_{n+1}(kr) \\ & + s_n [nh_n^{(1)}(kr) - (kr)h_n^{(1)}(kr)]\}_{|_{r=a}}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

utilizando a relação de recorrência [100],

$$j_{n+1}(x) = \frac{n}{x}j_n(x) - j'_n(x), \quad (3.23)$$

onde $j' = \partial_x j$, dentro da equação (3.22), encontramos a primeira equação do sistema linear

$$-\frac{i(ka)}{\omega} s_n h_n^{(1)'}(ka) + c_n n(n+1)j_n(k_s a) + b_n (k_\ell a) j'_n(k_\ell a) = \frac{i(ka)}{\omega} j'_n(ka). \quad (3.24)$$

Utilizando os potenciais de velocidade $\phi_{\text{in}(sc)}$ e a componente radial da tensão Eq. (3.19)

em termos dos potenciais escalares na segunda condição de contorno Eq.(3.15), obtemos

$$-i\rho_0\omega [j_n(kr) + s_n h_n^{(1)}(kr)] = -[\lambda_e + (-i\omega\lambda_v)^\nu] b_n k_\ell^2 j_n(k_\ell r) + 2[\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu \{b_n k_\ell^2 j_n''(k_\ell r) + c_n [3k_s^2 j_n''(k_s r) + r k_s^3 j_n'''(k_s r) + k_s^2 j_n(k_s r) + r k_s^3 j_n'(k_s r)]\}] \Big|_{r=a}, \quad (3.25)$$

usando as relações diferenciais [100],

$$x^2 j_n''(x) + 2x j_n'(x) + [x^2 - n(n+1)] j_n(x) = 0, \quad (3.26)$$

$$x^2 j_n'''(x) + 4x j_n''(x) + [2 + x^2 - n(n+1)] j_n'(x) + 2x j_n(x) = 0, \quad (3.27)$$

na Eq.(3.25), encontramos

$$i\rho_0\omega a^2 s_n h_n^{(1)}(ka) - \{[\lambda_e + (-i\omega\lambda_v)^\nu](k_\ell a)^2 j_n(k_\ell a) - 2[\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu](k_\ell a)^2 j_n''(k_\ell a)\} b_n + 2n(n+1)[\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu] [(k_s a) j_n'(k_s a) - j_n(k_s a)] c_n = -i\rho_0\omega a^2 j_n(ka). \quad (3.28)$$

Combinando as velocidades do som Eqs.(2.92)-(2.93) com os tempos de relaxação Eqs.(2.114)-(2.115) e substituindo dentro da relação de dispersão Eq. (2.118), obtemos

$$[\lambda_e + (-i\omega\lambda_v)^\nu] = \frac{\rho_1\omega^2}{k_s^2} \left(\frac{k_s^2 - 2k_\ell^2}{k_\ell^2} \right), \quad (3.29)$$

$$[\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu] = \frac{\rho_1\omega^2}{k_s^2}, \quad (3.30)$$

Agora, a Eq. (3.28) pode ser reescrita como,

$$\frac{i\rho_0(k_s a)^2}{\rho_1\omega} h_n^{(1)}(ka) s_n + \{[2n(n+1) - (k_s a)^2] j_n(k_\ell a) - 4(k_\ell a) j_n'(k_\ell a)\} b_n + 2n(n+1) [(k_s a) j_n'(k_s a) - j_n(k_s a)] c_n = -\frac{i\rho_0(k_s a)^2}{\rho_1\omega} j_n(ka). \quad (3.31)$$

Esta é a segunda equação do sistema linear.

Na terceira condição de contorno Eq.(3.16), utilizamos a componente tangencial da tensão Eqs. (3.20)-(3.21) em função dos potenciais de Debye. Desta forma, encontramos

$$\frac{im}{\sin\theta} d_n [(k_s a)^2 j_n'(k_s a) - (k_s^2 a) j_n(k_s a)] Y_n^m(\theta, \varphi) = 2b_n [j_n(k_\ell a) - (k_\ell a) j_n'(k_\ell a)] \partial_\theta Y_n^m(\theta, \varphi) + c_n [2j_n(k_s a) - (k_s a)^2 j_n(k_s a) - 2(k_s a) j_n'(k_s a) - 2(k_s a)^2 j_n''(k_s a)] \partial_\theta Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (3.32)$$

Utilizando a Eq.(3.21), a quarta condição de contorno é obtida da seguinte forma:

$$d_n [(k_s a)^2 j_n'(k_s a) - (k_s^2 a) j_n(k_s a)] \partial_\theta Y_n^m(\theta, \varphi) = -\frac{im}{\sin\theta} \{2b_n [j_n(k_\ell a) - (k_\ell a) j_n'(k_\ell a)] + c_n [2j_n(k_s a) - (k_s a)^2 j_n(k_s a) - 2(k_s a) j_n'(k_s a) - 2(k_s a)^2 j_n''(k_s a)]\} Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (3.33)$$

Combinando a Eq. (3.32) com a Eq.(3.33), obtemos

$$d_n[(k_s a)^2 j_n'(k_s a) - (k_s a)j_n(k_s a)] = 0. \quad (3.34)$$

Assim, o coeficiente de espalhamento d_n que aparece na Eq.(3.13) será nulo, de modo que o potencial escalar de Debye para ondas de cisalhamento $\psi_{s,2}$ é zero. Conseqüentemente, apenas um potencial de Debye $\psi_{s,1}$ é necessário para descrever a propagação de ondas de cisalhamento no interior de uma partícula esférica.

Desta forma, substituindo $d_n = 0$ e utilizando a relação diferencial Eq.(3.26), podemos reescrever a Eq.(3.32) como

$$2b_n[j_n(k_\ell a) - (k_\ell a)j_n'(k_\ell a)] + c_n\{2(k_s a)j_n'(k_s a) + [(k_s a)^2 - 2n(n+1) + 2]j_n(k_s a)\} = 0. \quad (3.35)$$

Assim, a aplicação das condições de contorno produz um conjunto de três equações algébricas lineares (3.24), (3.31) e (3.35) que podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Portanto, obtemos o coeficiente de espalhamento escalar s_n utilizando a regra de Cramer [100] para resolver o sistema linear da seguinte forma:

$$s_n = \det \begin{bmatrix} e_1 & d_{12} & d_{13} \\ e_2 & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (3.37)$$

onde os elementos da matriz são dados na tabela (3.1). É importante ressaltar que essa é a solução geral sem aproximações do problema de espalhamento por uma esfera viscoelástica.

3.2 Limite de Rayleigh

Espalhamento de uma onda por uma pequena partícula de raio muito menor do que o comprimento de onda é conhecido como espalhamento Rayleigh. Na análise de espalhamento Rayleigh, é natural definir um parâmetro de escala em termos do tamanho da partícula, $\varepsilon = ka \ll 1$. Usualmente, a expansão de ondas parciais da onda espalhada dada na Eq. (3.5) é reduzida para termos que envolvem somente os coeficientes de espalhamento de monopolo s_0 e dipolo s_1 [50].

Para analisar a força e torque de radiação acústico sobre partículas no limite de espalhamento Rayleigh, expandimos os coeficientes de espalhamento s_0 e s_1 na Eq. (3.37) em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$ usando o software Mathematica [101]. Desta forma,

Tabela 3.1: Coeficientes de espalhamento dados na Eq. (3.37) são obtidos resolvendo o sistema de equações lineares para condições de contorno na superfície da partícula. Os Elementos da matriz dessa equação são dados aqui.

e_1	$i(ka/\omega)j'_n(ka)$
e_2	$-i(\rho_0/\rho_1\omega)k_s^2a^2j_n(ka)$
d_{11}	$-i(ka/\omega)h_n^{(1)'}(ka)$
d_{12}	$k_\ell a j'_n(k_\ell a)$
d_{13}	$n(n+1)j_n(k_s a)$
d_{21}	$i(\rho_0/\rho_1\omega)k_s^2a^2h_n^{(1)}(ka)$
d_{22}	$-4k_\ell a j'_n(k_\ell a) + [(2n(n+1) - k_s^2 a^2)]j_n(k_\ell a)$
d_{23}	$2n(n+1)[k_s a j'_n(k_s a) - j_n(k_s a)]$
d_{31}	0
d_{32}	$2[j_n(k_\ell a) - k_\ell a j'_n(k_\ell a)]$
d_{33}	$2k_s a j'_n(k_s a) + [(k_s a)^2 - 2n(n+1) + 2]j_n(k_s a)$

Fonte: Autor, 2015.

temos

$$s_0 = -i\frac{f_0}{3}\varepsilon^3 + ig_0\varepsilon^5 - \frac{f_0^2}{9}\varepsilon^6 + O(\varepsilon^8 + i\varepsilon^7), \quad (3.38)$$

$$s_1 = i\frac{f_1}{6}\varepsilon^3 + ig_1\varepsilon^5 - \frac{f_1^2}{36}\varepsilon^6 + O(\varepsilon^8 + i\varepsilon^7), \quad (3.39)$$

onde f_0 , f_1 , g_0 , e g_1 são coeficientes complexos que dependem das propriedades viscoelásticas da partícula, e serão determinadas posteriormente. Antecipamos que para um fluido ideal o coeficiente f_1 é real, enquanto que a parte imaginária de f_0 , g_0 , e g_1 estão relacionadas com as propriedades de absorção da partícula espalhadora [50]. É importante notar que a ordem do coeficiente de espalhamento quadrupolo é $s_2 = O(\varepsilon^8 + i\varepsilon^7)$. Assim, coeficientes multipolares mais elevados com $n = 2, 3, \dots$ podem ser descartados com segurança na análise de espalhamento Rayleigh, isto é, $\varepsilon \ll 1$.

É útil escrever explicitamente as partes reais e imaginárias dos coeficientes f_0 , f_1 , g_0 , e g_1 nas Eqs. (3.38) e (3.39). Isto é feito através da inclusão dos índices superiores ^(R) e ^(I) para, respectivamente, a parte real e imaginária de cada coeficiente, por exemplo, $f_0 = f_0^{(R)} + if_0^{(I)}$. Agora, podemos escrever os coeficientes de espalhamento escalares como

$$s_0 = \frac{f_0^{(I)}}{3}\varepsilon^3 - \frac{f_0^{(R)2}}{9}\varepsilon^6 - i\frac{f_0^{(R)}}{3}\varepsilon^3, \quad (3.40)$$

$$s_1 = -\frac{f_1^{(I)}}{6}\varepsilon^3 - g_1^{(I)}\varepsilon^5 - \frac{f_1^{(R)2}}{36}\varepsilon^6 + i\frac{f_1^{(R)}}{6}\varepsilon^3. \quad (3.41)$$

Note que somente os termos de menores ordens de ε foram mantidos nessas equações, assim a contribuição de g_0 foi negligenciada. Para uma partícula não absorvedora, os coeficientes f_0 , f_1 , e g_1 são quantidades reais. Nesse caso, a contribuição do termo ε^5 pode ser desprezada quando comparada com o termo de ε^3 . Como f_1 é real em um fluido

não viscoso o coeficiente $f_1^{(1)}$ é nulo. Uma vez que estamos lidando com fluidos ideais aqui, esse coeficiente será omitido posteriormente.

Neste capítulo, foi discutido a teoria de espalhamento acústico por uma partícula esférica viscoelástica. Além disso, derivamos o coeficiente de espalhamento escalar para aproximação monopolo e dipolo que será utilizada nas fórmulas de força e torque de radiação acústico. É importante ressaltar que o espalhamento acústico está diretamente relacionado com o fenômeno de força e torque de radiação acústico.

No próximo capítulo, iremos descrever como obter expressões analíticas para força e torque de radiação acústico que utilizam os fundamentos de espalhamento.

4

Força e torque de radiação acústico no limite de Rayleigh

A força de radiação acústica surge quando um campo acústico interage com um objeto suspenso em um fluido. Devido a essa interação, o objeto absorve e/ou espalha a onda acústica ocasionando uma transferência de momento da onda para o objeto. Assim, o fluxo do momento linear médio e a tensão que atuam sobre o objeto é conhecido como força de radiação acústica. Da mesma forma, o torque de radiação acústico pode surgir devido a transferência do momento angular da onda para o objeto. Desta forma, o fluxo do momento angular médio exercido sobre o objeto é denominado como torque de radiação acústico. Neste capítulo, vamos apresentar expressões analíticas para força e torque de radiação acústico exercida sobre uma partícula esférica devido a uma frente de onda arbitrária.

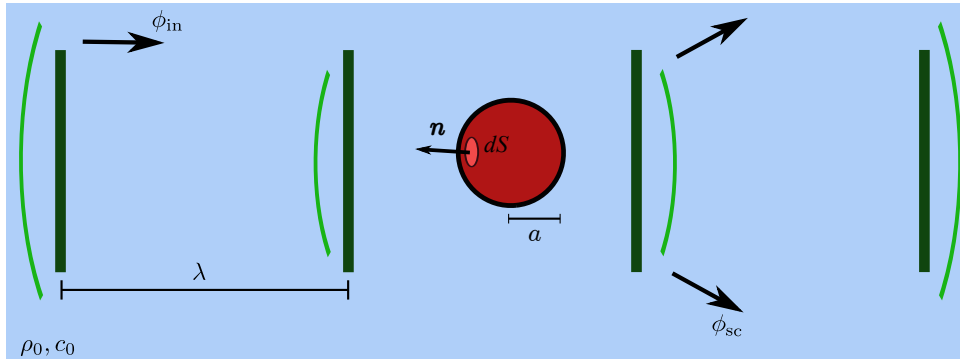
4.1 Efeitos negligenciados

Neste trabalho não iremos considerar os efeitos termo-viscosos por tratar apenas de um fluido ideal. Considere uma onda harmônica acústica com frequência angular ω interagindo com uma partícula viscoelástica esférica de raio a , suspensa em um fluido homogêneo de densidade ρ_0 e velocidade do som c_0 . Iremos negligenciar os efeitos termo-viscosos no processo de força e torque de radiação acústico. Desta forma, o fluido é considerado não-viscoso. Assim, é necessário assumir que o raio da partícula e o comprimento de onda incidente λ devem ser muito maior que os limites térmicos $\delta_t = \sqrt{2D_t/\omega}$ e viscosos $\delta_v = \sqrt{2\nu_0/\omega}$ [85], isto é,

$$a, \lambda \gg \delta_t, \delta_v, \quad (4.1)$$

onde D_t é a difusividade térmica e ν_0 é a viscosidade cinética. Valores típicos desses limites na água para uma onda com frequência de 2 MHz e comprimento de onda $\lambda = 0.75$ mm são $\delta_t = 0.15$ μm e $\delta_v = 0.38$ μm . Portanto, podemos negligenciar os efeitos termo-viscosos para partículas com raio $a \gg 3.8$ μm .

Figura 4.1: Ilustração da interação entre a onda incidente ϕ_{in} (barras verticais verde-escuro) de comprimento de onda λ e a partícula viscoelástica (círculo vermelho) de raio a suspensa em um fluido ideal. A onda espalhada devido essa interação é denotada por ϕ_{sc} (arcos verde claro).



Fonte: Autor, 2015.

4.2 Força de radiação acústica no limite de Rayleigh

4.2.1 Tensor tensão de radiação

Suponha que uma onda incidente atinge uma pequena partícula esférica de superfície S_0 como pode ser visto na figura (4.1). A força de radiação acústica média \mathbf{F}^{rad} exercida pela onda sobre a partícula é encontrada integrando o tensor de tensão $\bar{\mathbf{S}}$ que age sobre a partícula, ou seja,

$$\mathbf{F}^{\text{rad}} = \int_{S_0} \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} d^2r, \quad (4.2)$$

onde a barra denota média temporal. A média temporal de uma função f ao longo de um período de oscilação completo $2\pi/\omega$ é definido da seguinte forma,

$$\bar{f} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) dt. \quad (4.3)$$

Desta forma, precisamos encontrar o tensor de tensão médio devido a interação da onda acústica com a partícula. É conveniente relembrar que definimos o tensor de tensão de radiação ao demonstrar a equação de conservação do momento Eq. (2.11), da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = p\mathbf{I} + \rho\mathbf{v}\mathbf{v}. \quad (4.4)$$

Normalmente, os campos de segunda ordem seriam negligenciados comparados com os campos de primeira ordem. No entanto, se os campos lineares têm uma dependência harmônica no tempo, eles não contribuem para a média temporal. Por exemplo, a partir da Eq. (4.3) obtemos $\overline{\cos\omega t} = 0$ ou $\overline{\sin\omega t} = 0$. No entanto, a média temporal de termos contendo produtos de funções harmônicas no tempo de primeira ordem não é nula, por exemplo $\overline{\cos^2\omega t} = 1/2$. Portanto, a força de radiação acústica é no mínimo um efeito de segunda ordem. Desta forma, é necessário apresentar algumas propriedades das médias

temporais de produtos de funções harmônicas e complexas.

Em geral, estamos interessados em média temporal de quantidades de segunda ordem que serão usados extensivamente nas próximas seções. Considere que duas funções harmônicas de primeira ordem são definidas da seguinte forma,

$$f(t) = \text{Re}[f_1 e^{-i\omega t}], \quad (4.5)$$

$$g(t) = \text{Re}[g_1 e^{-i\omega t}], \quad (4.6)$$

onde f_1 e g_1 são amplitudes das funções e “Re” é a parte real de uma quantidade complexa. A média temporal do produto das funções sobre um período completo T é definido como

$$\overline{f(t)g(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt = \frac{1}{2} \text{Re}[f_1 g_1^*], \quad (4.7)$$

onde o asterisco (*) indica complexo conjugado.

A teoria de força de radiação depende da expansão de segunda ordem dos campos acústicos no fluido. Estas expansões são vistas de forma geral nas Eqs. (2.24)-(2.26). Para a aproximação de segunda ordem, encontramos que o tensor tensão de radiação é dado por

$$\overline{\mathbf{S}^{(2)}} = \overline{p^{(2)}} \mathbf{I} + \rho_0 \overline{\mathbf{v}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)}}, \quad (4.8)$$

onde $p^{(2)}$ é a pressão de segunda ordem, \mathbf{I} é o tensor unitário e $\mathbf{v}^{(1)}$ é a velocidade de primeira ordem. Os campos acústicos na aproximação de segunda ordem nas Eqs. (2.24)-(2.26) tornam-se

$$p = p_0 + Mp^{(1)} + M^2 p^{(2)}, \quad (4.9)$$

$$\rho = \rho_0 + M\rho^{(1)} + M^2 \rho^{(2)}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{v} = M\mathbf{v}^{(1)} + M^2 \mathbf{v}^{(2)}. \quad (4.11)$$

Combinando as Eqs. (4.9)-(4.11) com a Eq. (2.14), obtemos a equação de segunda ordem do movimento para o campo acústico

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v}^{(2)} = -\nabla p^{(2)} - \rho^{(1)} \partial_t \mathbf{v}^{(1)} - \rho_0 (\mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{(1)}. \quad (4.12)$$

Note que os dois últimos termos da Eq. (4.12) são produtos de dois campos de primeira ordem. Considerando a média temporal da Eq. (4.12), obtemos

$$\nabla \overline{p^{(2)}} = -\overline{\rho^{(1)} \partial_t \mathbf{v}^{(1)}} - \overline{\rho_0 (\mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{(1)}}. \quad (4.13)$$

Assim, podemos escrever a Eq. (4.13) em termos do potencial de velocidade, fazendo $\mathbf{v}^{(1)} = \nabla \phi$,

$$\nabla \overline{p^{(2)}} = -\overline{\rho^{(1)} \partial_t \nabla \phi} - \overline{\rho_0 \nabla \phi \cdot \nabla \nabla \phi}, \quad (4.14)$$

onde,

$$\nabla\phi \cdot \nabla\nabla\phi = \frac{1}{2}\nabla(\nabla\phi \cdot \nabla\phi) = \nabla\left(\frac{v^{(1)2}}{2}\right), \quad (4.15)$$

utilizando as expressões da aproximação de primeira ordem Eqs. (2.30) e (2.32), encontramos a pressão de segunda ordem em termos pressão e velocidade do fluido de primeira ordem,

$$\overline{p^{(2)}} = \frac{\overline{p^{(1)2}}}{2\rho_0 c_0^2} - \frac{\overline{\rho_0 v^{(1)2}}}{2}, \quad (4.16)$$

onde $v^{(1)2} = \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)}$. Note que o primeiro e o segundo termo do lado direito dessa equação é a energia potencial e cinética, respectivamente. Finalmente, substituindo a Eq. (4.16) na Eq. (4.8) obtemos a tensão de radiação de segunda ordem,

$$\overline{\mathbf{S}^{(2)}} = \left(\frac{\overline{p^{(1)2}}}{2\rho_0 c_0^2} - \frac{\overline{\rho_0 v^{(1)2}}}{2} \right) \mathbf{I} + \overline{\rho_0 \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)}}, \quad (4.17)$$

ou,

$$\overline{\mathbf{S}^{(2)}} = -\overline{\mathcal{L}}\mathbf{I} + \overline{\rho_0 \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)}}, \quad (4.18)$$

onde os termos dentro do parênteses da Eq. (4.17) é identificado como densidade Lagrangiana acústica \mathcal{L} , visto que o primeiro termo é a energia potencial e o segundo termo é a energia cinética.

4.2.2 Método de campo distante

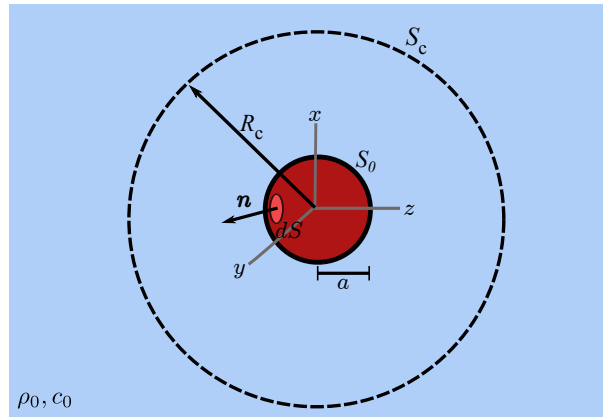
A força de radiação acústica média pode ser escrita utilizando o tensor de tensão médio Eq. (4.17) dentro da Eq. (4.2) da seguinte maneira:

$$\mathbf{F}^{\text{rad}} = \int_{S_0} \left[\left(\frac{\overline{p^{(1)2}}}{2\rho_0 c_0^2} - \frac{\overline{\rho_0 v^{(1)2}}}{2} \right) \mathbf{I} + \overline{\rho_0 \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)}} \right] \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}. \quad (4.19)$$

Os campos espalhados de primeira ordem foram determinados para um dado campo incidente de primeira ordem através do problema de espalhamento foi apresentado no capítulo 3. A força de radiação acústica sobre uma partícula é então calculada conhecendo a pressão total (ondas incidente e espalhada) e a velocidade do fluido agindo sobre a superfície da partícula.

Como não existe forças volumétricas neste problema, de acordo com a conservação do momento para fluido ideal, Eq. (2.11), o divergente do tensor tensão de radiação será zero ($\nabla \cdot \overline{\mathbf{S}^{(2)}} = 0$), devido a este fato, é possível expressar a força sobre um objeto como a integral sobre uma superfície fechada que englobe o mesmo, denominada de superfície de controle S_c . Considerando o resultado da análise da teoria de espalhamento, é vantajoso a escolha da aproximação de campo distante, $kr \gg 1$. Nessa região de campo distante representada pelo círculo tracejado na figura (4.2), os cálculos são significativamente simplificados devido os potenciais de velocidade ϕ_{in} e ϕ_{sc} serem expressos pelas Eqs. (3.8) e (3.10), respectivamente.

Figura 4.2: Sistema de coordenadas para computar a força de radiação acústica em uma partícula esférica de raio a utilizando uma superfície de controle S_c (linhas tracejadas) de raio R_c



Fonte: Autor, 2015.

Considere a configuração dada na fig. (4.2), onde a superfície de controle S_c representada pelo círculo tracejado e com raio R_c está centrada na origem do sistema de coordenadas. Para encontrar a força sobre a superfície de controle, iremos integrar o divergente da tensão de radiação de segunda ordem sobre o volume de controle V_c ,

$$\int_{V_c} \nabla \cdot \overline{\mathbf{S}^{(2)}} d^3\mathbf{r} = \int_{S_0} \overline{\mathbf{S}^{(2)}} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} + \int_{S_c} \overline{\mathbf{S}^{(2)}} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = 0. \quad (4.20)$$

Note que utilizamos o teorema da divergência para encontrar essa equação. Portanto, encontramos que a força de radiação acústica pode ser reescrita utilizando a Eq. (4.18) da seguinte forma:

$$\mathbf{F}^{\text{rad}} = - \int_{S_c} \mathbf{S}^{(2)} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = \int_{S_c} \left(\overline{\mathcal{L}}\mathbf{I} - \rho_0 \overline{\mathbf{v}^{(1)}\mathbf{v}^{(1)}} \right) \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}, \quad (4.21)$$

utilizando a equação que relaciona o ângulo sólido $d\Omega$ com o elemento de área $d^2\mathbf{r}$, $d\Omega = \mathbf{e}_r \cdot d^2\mathbf{r}/R_c^2$, obtemos

$$\mathbf{F}^{\text{rad}} = R_c^2 \int_{4\pi} \left(\overline{\mathcal{L}}\mathbf{I} - \rho_0 \overline{\mathbf{v}^{(1)}\mathbf{v}^{(1)}} \right) \cdot \mathbf{e}_r d\Omega, \quad (4.22)$$

onde $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ é o ângulo sólido diferencial em coordenadas esféricas e \mathbf{e}_r é o vetor unitário na direção radial dado por

$$\mathbf{e}_r = \cos\varphi \sin\theta \mathbf{e}_x + \sin\varphi \sin\theta \mathbf{e}_y + \cos\theta \mathbf{e}_z. \quad (4.23)$$

A pressão total $p^{(1)}$ e a velocidade $\mathbf{v}^{(1)}$ no fluido ideal são dados pela soma dos campos

incidentes e espalhados da seguinte maneira:

$$p^{(1)} = (p_{\text{in}} + p_{\text{sc}})e^{-i\omega t}, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = (\mathbf{v}_{\text{in}} + \mathbf{v}_{\text{sc}})e^{-i\omega t}, \quad (4.25)$$

onde $p_{\text{in}(\text{sc})}$ é a pressão incidente (espalhada) e $\mathbf{v}_{\text{in}(\text{sc})}$ é a velocidade incidente (espalhada).

Desta forma, a densidade Lagrangiana e o fluxo de momento são expressos em termos das ondas incidentes e espalhadas,

$$\mathcal{L} = \left(\frac{\rho_0 \mathbf{v}_{\text{in}} \cdot \mathbf{v}_{\text{in}}}{2} - \frac{p_{\text{in}}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) + \left(\frac{\rho_0 \mathbf{v}_{\text{sc}} \cdot \mathbf{v}_{\text{sc}}}{2} - \frac{p_{\text{sc}}^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) + \left(\rho_0 \mathbf{v}_{\text{in}} \cdot \mathbf{v}_{\text{sc}} - \frac{p_{\text{in}} p_{\text{sc}}}{\rho_0 c_0^2} \right) \quad (4.26)$$

$$\rho_0 \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} = \rho_0 (\mathbf{v}_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{in}} + \mathbf{v}_{\text{sc}} \mathbf{v}_{\text{sc}} + \mathbf{v}_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{sc}} + \mathbf{v}_{\text{sc}} \mathbf{v}_{\text{in}}), \quad (4.27)$$

onde o primeiro e o segundo parênteses da Eq.(4.26) são as contribuições das ondas incidente e espalhadas para a Lagrangiana, enquanto que o terceiro termo é a Lagrangiana de interação.

Observe que as contribuições somente de campos incidentes não contém informação sobre o espalhamento, portanto devem ser zero. Além disso, a superfície esférica de controle pode ser considerada suficientemente distante do objeto ($R_c \rightarrow \infty$), de modo que o segundo termo da Eq.(4.26) seja zero, uma vez que a onda espalhada será localmente uma onda plana progressiva. Então, utilizando Eq. (4.22) podemos expressar a força de radiação no campo distante como

$$\mathbf{F}^{\text{rad}} = \lim_{R_c \rightarrow \infty} R_c^2 \int_{4\pi} \left\{ \left(\rho_0 \overline{\mathbf{v}_{\text{in}} \cdot \mathbf{v}_{\text{sc}}} - \frac{\overline{p_{\text{in}} p_{\text{sc}}}}{\rho_0 c_0^2} \right) \mathbf{e}_r - \rho_0 \left[\overline{\mathbf{v}_{\text{sc}} (\mathbf{v}_{\text{sc}} \cdot \mathbf{e}_r)} + \overline{\mathbf{v}_{\text{in}} (\mathbf{v}_{\text{sc}} \cdot \mathbf{e}_r)} + \overline{\mathbf{v}_{\text{sc}} (\mathbf{v}_{\text{in}} \cdot \mathbf{e}_r)} \right] \right\} d\Omega. \quad (4.28)$$

Usando a equação da média do produto de funções, Eq. (4.7), e escrevendo a pressão como $p_{\text{in}(\text{sc})} = i\rho_0 \omega \phi_{\text{in}(\text{sc})}$ e a velocidade do fluido $\mathbf{v}_{\text{in}(\text{sc})} = \nabla \phi_{\text{in}(\text{sc})}$ na Eq. (4.28) encontramos

$$\mathbf{F}^{\text{rad}} = -E_0 \lim_{R_c \rightarrow \infty} R_c^2 \int_{4\pi} \text{Re} \left[\left(\phi_{\text{in}} - \frac{i}{k} \partial_r \phi_{\text{in}} \right) \phi_{\text{sc}}^* + |\phi_{\text{sc}}|^2 \right] \mathbf{e}_r d\Omega, \quad (4.29)$$

onde ϕ_{in} e ϕ_{sc} são os potenciais de velocidade incidente e espalhado, respectivamente, $E_0 = p_0^2 / (2\rho_0 c_0^2)$ é a densidade da energia potencial.

Desta forma, substituindo as expressões assintóticas para campo distante, Eqs. (3.8) e (3.10), na Eq. (4.29) é possível obter

$$\mathbf{F}^{\text{rad}} = -\frac{E_0}{k^2} \int_{4\pi} \text{Re} \left[\sum_{n,m} \sum_{n',m'} i^{n'-n} (a_{nm} + s_n a_{nm}) s_n^* a_{nm}^* Y_n^m(\theta, \varphi) Y_{n'}^{m'*}(\theta, \varphi) \right] \mathbf{e}_r d\Omega. \quad (4.30)$$

Utilizando o vetor unitário Eq. (4.23) e as relações integrais dos harmônicos esféricos

dada na Ref. [100] , podemos escrever a força de radiação em coordenadas cartesianas como segue

$$\mathbf{F}^{\text{rad}} = \pi a^2 E_0 (Y_x \mathbf{e}_x + Y_y \mathbf{e}_y + Y_z \mathbf{e}_z), \quad (4.31)$$

onde \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z são os vetores unitários no plano cartesiano e Y_x , Y_y , Y_z são as componentes cartesianas da força de radiação adimensional dadas por

$$\begin{aligned} Y_x + iY_y &= \frac{i}{2\pi(ka)^2} \sum_{n,m} \sqrt{\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}} \\ &\quad \times [(s_n + s_{n+1}^* + 2s_n s_{n+1}^*) a_{nm} a_{n+1,m+1}^* + (s_n^* + s_{n+1} + 2s_n^* s_{n+1}) a_{n,-m}^* a_{n+1,-m-1}], \quad (4.32) \\ Y_z &= \frac{1}{\pi(ka)^2} \text{Im} \sum_{n,m} \sqrt{\frac{(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)}} (s_n + s_{n+1}^* + 2s_n s_{n+1}^*) a_{nm} a_{n+1,m}^*. \quad (4.33) \end{aligned}$$

Note que Y_x , Y_y e Y_z são quantidades reais que dependem dos coeficientes de forma do feixe a_{nm} e dos coeficientes de espalhamento escalares s_n . Assim, a força de radiação depende das propriedades acústicas do objeto dadas pelos s_n e as características da onda incidente denotadas por a_{nm} .

No regime de espalhamento Rayleigh, somente s_0 e s_1 são relevantes como discutido anteriormente no capítulo (3). Portanto, mantendo apenas estes termos, verifica-se que os componentes cartesianas da força de radiação adimensional são dadas por

$$\begin{aligned} Y_x + iY_y &= \frac{i}{2\pi(ka)^2} \left[\sqrt{\frac{2}{3}} (s_0 + s_1^* + 2s_0 s_1^*) a_{0,0} a_{1,1}^* + (s_0^* + s_1 + 2s_0^* s_1) a_{0,0}^* a_{1,-1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=-1}^1 \sqrt{\frac{(2+m)(3+m)}{15}} (s_1 a_{1,m} a_{2,m+1}^* + s_1^* a_{1,-m}^* a_{2,-m-1}) \right], \quad (4.34) \end{aligned}$$

$$Y_z = \frac{1}{\pi(ka)^2} \text{Im} \left[\sqrt{\frac{1}{3}} (s_0 + s_1^* + 2s_0 s_1^*) a_{0,0} a_{1,0}^* + \sum_{m=-1}^1 \sqrt{\frac{(2-m)(2+m)}{15}} s_1 a_{1,m} a_{2,m}^* \right]. \quad (4.35)$$

Observe que, apesar de somente s_0 e s_1 serem relevantes no regime de Rayleigh, é necessário computar o momento de quadrupolo da onda incidente $a_{2,m}$.

É possível demonstrar que a força de radiação agindo sobre uma partícula de Rayleigh pode ser expressa em termos dos campos acústicos incidentes e do monopolo s_0 e dipolo s_1 dos coeficientes de espalhamento escalares. Para isso, iremos expandir a pressão em torno da origem até a aproximação de segunda ordem,

$$p(\mathbf{r}) = p(\mathbf{0}) + i\rho_0 c_0 k \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{0}) + \frac{i\rho_0 c_0 k \mathbf{r} \cdot [\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{0})]}{2} \quad (4.36)$$

onde, $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$. Substituindo a Eq. (4.36) na equação dos coeficientes de

forma do feixe Eq. (3.7) juntamente com $\mathbf{r} = R_c(\cos\varphi \sin\theta \mathbf{e}_x + \sin\varphi \sin\theta \mathbf{e}_y + \cos\theta \mathbf{e}_z)$ com o raio de controle $R_c \rightarrow 0$, obtemos os coeficientes de forma do feixe até aproximação de quadrupolo como

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= \sqrt{4\pi}p(\mathbf{0}), \\ a_{1,\mp 1} &= \rho_0 c_0 \sqrt{6\pi} [\pm i v_x(\mathbf{0}) + v_y(\mathbf{0})], \\ a_{1,0} &= 2i\rho_0 c_0 \sqrt{3\pi} v_z(\mathbf{0}), \\ a_{2,\mp 2} &= \frac{\rho_0 c_0}{k} \sqrt{\frac{15\pi}{2}} [(i\partial_x v_x(\mathbf{0}) - \partial_y v_y(\mathbf{0})) \pm 2\partial_y v_x(\mathbf{0})], \\ a_{2,\mp 1} &= \frac{\rho_0 c_0}{k} \sqrt{30\pi} [\pm i\partial_z v_x(\mathbf{0}) + \partial_z v_y(\mathbf{0})], \\ a_{2,0} &= -\frac{i\rho_0 c_0}{k} \sqrt{5\pi} [\partial_x v_x(\mathbf{0}) + \partial_y v_y(\mathbf{0}) - 2\partial_z v_z(\mathbf{0})]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Agora, substituindo a Eq. (4.37) nas Eqs. (4.34) e (4.35), encontramos a seguinte expressão para a força de radiação acústica,

$$\mathbf{F}^{\text{rad}} = -\frac{2\pi a^2}{\varepsilon^2 c_0} \text{Re} \left[\frac{3i\rho_0 c_0 s_1}{k} \mathbf{v}_{\text{in}} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\text{in}}^* + (s_0 + 2s_0 s_1^*) p_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{in}}^* + \text{O}(\varepsilon^8 + i\varepsilon^7) \right]. \quad (4.38)$$

Utilizando a identidade

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{in}}^* = \mathbf{v}_{\text{in}} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\text{in}}^* + \mathbf{v}_{\text{in}}^* (\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{in}}), \quad (4.39)$$

e considerando a relação

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{in}} = \frac{ik p_{\text{in}}}{\rho_0 c_0}, \quad (4.40)$$

que é derivada da Eq. (2.31), a força de radiação da Eq. (4.38) torna-se

$$\mathbf{F}^{\text{rad}} = -\frac{2\pi a^2}{\varepsilon^2 c_0} \text{Re} \left[\frac{3i\rho_0 c_0 s_1}{k} \nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{in}}^* + (s_0 + 3s_1 + 2s_0 s_1^*) p_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{in}}^* + \text{O}(\varepsilon^8 + i\varepsilon^7) \right]. \quad (4.41)$$

Observe que, na aproximação monopolo-dipolo, a força de radiação exercida sobre uma partícula pequena é dada em termos de s_0 , s_1 , pressão incidente p_{in} e velocidade do fluido \mathbf{v}_{in} ambos evoluídos no centro da partícula. Esta fórmula expressa a solução completa para a aproximação monopolo-dipolo. Entretanto, a análise da força de radiação direta em termos dos coeficientes s_0 e s_1 não é trivial. Por isso, iremos simplificar a Eq. (4.41).

Depois de substituir as Eqs. (3.40) e (3.41) na Eq. (4.41), e utilizar a expressão do fluxo do momento dada na Ref. [102],

$$\text{Re} [\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{in}}^*] = \nabla \left(\frac{\rho_0 |\mathbf{v}_{\text{in}}|^2}{2} - \frac{|p_{\text{in}}|^2}{2\rho_0 c_0^2} \right), \quad (4.42)$$

obtemos a força de radiação como a soma de três contribuições, denominadas como força

gradiente \mathbf{F}_{grad} , força de espalhamento \mathbf{F}_{sca} , e força de absorção \mathbf{F}_{abs} , dadas por

$$\mathbf{F}_{\text{grad}} = -\pi a^2 \varepsilon \tilde{\nabla} \left(f_0^{(\text{R})} \frac{|p_{\text{in}}|^2}{3\rho_0 c_0^2} - f_1^{(\text{R})} \frac{\rho_0 |\mathbf{v}_{\text{in}}|^2}{2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.43)$$

$$\mathbf{F}_{\text{sca}} = \pi a^2 \varepsilon^4 \left[\frac{4}{9c_0} \left(f_0^{(\text{R})2} + f_0^{(\text{R})} f_1^{(\text{R})} + \frac{3f_1^{(\text{R})2}}{4} \right) \mathbf{I}_{\text{in}} - \frac{f_1^{(\text{R})2}}{6} \text{Im}[\tilde{\nabla} \cdot \rho_0 \mathbf{v}_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{in}}^*] \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \quad (4.44)$$

$$\mathbf{F}_{\text{abs}} = -\pi a^2 \varepsilon \left[\frac{4}{3} f_0^{(\text{I})} \frac{\mathbf{I}_{\text{in}}}{c_0} - 6\varepsilon^2 g_1^{(\text{I})} \left(\frac{2\mathbf{I}_{\text{in}}}{c_0} - \text{Im}[\tilde{\nabla} \cdot \rho_0 \mathbf{v}_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{in}}^*] \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (4.45)$$

onde $\tilde{\nabla} = k^{-1} \nabla$ é o operador gradiente adimensional conveniente e $\mathbf{I}_{\text{in}} = \text{Re}[p_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{in}}^*]/2$ é a intensidade média incidente. Os super índices ^(R) e ^(I) correspondem a parte real e imaginária dos coeficientes f_0 , f_1 , e g_1 , respectivamente. Ressaltamos que os campos acústicos incidentes p_{in} e \mathbf{v}_{in} devem ser avaliados no centro da partícula.

A força de radiação gradiente \mathbf{F}_{grad} foi primeiramente derivado por Gorkov [27] considerando uma partícula fluida compressível não absorvedora. Essa componente da força corresponde a parte conservativa da força de radiação acústica. O seu papel é dominante quando a onda incidente tem uma variação espacial na densidade de energia.

A força de radiação de espalhamento \mathbf{F}_{sca} exercida sobre uma partícula compressível absorvedora foi derivada por Silva [50]. O termo “força de espalhamento” está relacionado ao fato de que a força é proporcional à seção transversal de espalhamento para uma onda plana [56].

A contribuição da força de radiação de absorção \mathbf{F}_{abs} esta relacionada com as propriedades de absorção da partícula. Essa componente foi anteriormente derivada considerando uma esfera fluida apenas com absorção devido a dilatação [103, 50]. A equação (4.45) generaliza esses resultados incluindo a absorção de cisalhamento.

4.3 Torque de radiação acústico no limite de Rayleigh

A interação de uma partícula suspensa de volume V_0 e superfície S_0 com uma onda acústica pode dar origem a um torque de radiação acústico. Isso acontece devido a transferência do fluxo do momento angular para a partícula. Além disso, a partícula pode ser configurada para girar em torno de um determinado eixo de rotação como resultado do torque de radiação acústico [20, 21, 22]. Conseqüentemente, um grau de liberdade rotacional também esta disponível na manipulação de partículas com base em métodos acústicos. Nesta seção, consideramos o torque de radiação acústico exercido por uma onda arbitrária em uma partícula viscoelástica suspensa em um fluido ideal.

4.3.1 Fluxo do momento angular

O torque de radiação acústico é um efeito não linear de segunda ordem produzido pela transferência do momento angular do campo acústico para a partícula. Semelhante à força de radiação acústica, o torque de radiação também é uma quantidade média.

Desta forma, o fluxo de momento angular médio em relação a origem de uma sistema de coordenadas, é definido da seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{M}}^{(2)} = \mathbf{r} \times \overline{\mathbf{S}}^{(2)}, \quad (4.46)$$

onde $\mathbf{M}^{(2)}$ é conhecido como tensor tensão de radiação do momento angular, \mathbf{r} é o vetor posição e $\mathbf{S}^{(2)}$ é o tensor de tensão de radiação.

4.3.2 Método de campo distante

O torque de radiação acústico \mathbf{N}^{rad} sobre a superfície S_0 é definido como a integral do fluxo de momento médio,

$$\mathbf{N}^{\text{rad}} = \int_{S_0} \overline{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = \int_{S_0} \left[\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{S}}^{(2)} \right] \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}. \quad (4.47)$$

De forma análoga à demonstração da força de radiação, é possível expressar o torque de radiação acústico como a integral sobre uma superfície de controle S_c que englobe a partícula utilizando a Eq. (4.20) da seguinte forma:

$$\mathbf{N}^{\text{rad}} = - \int_{S_c} \left[\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{S}}^{(2)} \right] \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}. \quad (4.48)$$

Essa equação nos permite utilizar as expansões de campo distante para calcular o torque de radiação acústico. Utilizando a tensão de segunda ordem, Eq. (4.17), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{\text{rad}} &= \int_{S_c} \mathbf{r} \times \left[\left(\frac{\rho_0 \overline{v^{(1)2}}}{2} - \frac{\overline{p^{(1)2}}}{2\rho_0 c_0^2} \right) \mathbf{I} - \rho_0 \overline{\mathbf{v}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)}} \right] \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}, \\ \mathbf{N}^{\text{rad}} &= -\rho_0 \int_{S_c} \left[\mathbf{r} \times \overline{\mathbf{v}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)}} \right] \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Podemos escrever o torque de radiação da Eq. (4.49) usando as Eqs. (4.25) e (4.7) como

$$\mathbf{N}^{\text{rad}} = -\frac{\rho_0}{2} \int_{S_c} \text{Re} \left[\mathbf{r} \times (\mathbf{v}_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{in}}^* + \mathbf{v}_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{sc}}^* + \mathbf{v}_{\text{sc}} \mathbf{v}_{\text{in}}^* + \mathbf{v}_{\text{sc}} \mathbf{v}_{\text{sc}}^*) \right] \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}. \quad (4.50)$$

Note que, apenas a contribuição da velocidade incidente não contém informação sobre o espalhamento, portanto deve ser zero. Considerando a superfície de controle esférica distante da partícula ($R_c \rightarrow \infty$), podemos expressar o torque de radiação no campo distante da seguinte forma:

$$\mathbf{N}^{\text{rad}} = -\frac{\rho_0}{2} \lim_{R_c \rightarrow \infty} R_c^2 \int_{4\pi} \text{Re} \{ \mathbf{r} \times [\mathbf{v}_{\text{in}} (\mathbf{v}_{\text{sc}}^* \cdot \mathbf{e}_r) + \mathbf{v}_{\text{sc}} (\mathbf{v}_{\text{in}}^* \cdot \mathbf{e}_r) + \mathbf{v}_{\text{sc}} (\mathbf{v}_{\text{sc}}^* \cdot \mathbf{e}_r)] \} d\Omega. \quad (4.51)$$

Em termos do potencial de velocidade $\phi_{\text{in}(\text{sc})}$, o torque pode ser expresso como

$$\mathbf{N}^{\text{rad}} = \frac{\rho_0}{2} \lim_{R_c \rightarrow \infty} R_c^2 \int_{4\pi} \text{Im} \left[(\hat{\mathbf{L}}\phi_{\text{in}})(\partial_r \phi_{\text{sc}}^*) + (\hat{\mathbf{L}}\phi_{\text{sc}})(\partial_r \phi_{\text{in}}^*) + (\hat{\mathbf{L}}\phi_{\text{sc}})(\partial_r \phi_{\text{sc}}^*) \right] d\Omega, \quad (4.52)$$

onde “Im” significa parte imaginária e $\hat{\mathbf{L}} \equiv -i(\mathbf{r} \times \nabla)$ é o operador momento angular.

Agora, substituindo as expressões assintóticas para campo distante Eqs. (3.8) e (3.10) dentro da Eq. (4.52) encontramos

$$\mathbf{N}^{\text{rad}} = -\frac{VE_0}{\pi(ka)^3} \text{Re} \sum_{n,m} \sum_{n',m'} i^{n-n'} (a_{nm}^* + s_n^* a_{nm}^*) s_{n'} a_{n'm'} \int_{4\pi} Y_n^{m*} \hat{\mathbf{L}} Y_{n'}^{m'} d\Omega. \quad (4.53)$$

Para obter o torque de radiação acústico em coordenadas cartesianas, introduzimos os operadores momento angular [104]

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y = \pm e^{\pm i\varphi} (\partial_{\theta} \pm i \cot \theta \partial_{\varphi}), \quad (4.54)$$

$$\hat{L}_z = -i\partial_{\varphi}, \quad (4.55)$$

onde \hat{L}_i ($i = x, y, z$) são as componentes cartesianas do operador $\hat{\mathbf{L}}$, e \hat{L}_+ e \hat{L}_- são chamados de operadores escada.

É possível mostrar que, quando os operadores escadas e o operador da componente z do momento angular atuam na função harmônico esférico, obtemos

$$\hat{L}_{\pm} Y_n^m = b_{n,\pm m} Y_n^{m\pm 1}, \quad (4.56)$$

$$\hat{L}_z Y_n^m = m Y_n^m, \quad (4.57)$$

onde $b_{n,\pm m} = \sqrt{(n \mp m)(n \pm m + 1)}$. Substituindo essas equações dentro Eq. (4.53) obtemos as componentes cartesianas adimensionais do torque de radiação como

$$N_x + iN_y = -\frac{1}{2\pi(ka)^3} \sum_{n,m} \sqrt{(n-m)(n+m+1)} [(1+s_n) s_n^* a_{nm} a_{n,m+1}^* + (1+s_n^*) s_n a_{n,-m}^* a_{n,-m-1}], \quad (4.58)$$

$$N_z = -\frac{1}{\pi(ka)^3} \text{Re} \sum_{n,m} m [(1+s_n) s_n^*] |a_{nm}|^2. \quad (4.59)$$

Note que as Eqs. (4.58) e (4.59) são expressões gerais do torque de radiação acústico, ou seja, são válidas para qualquer campo acústico incidente. Além disso, similarmente à força de radiação analisada anteriormente, o torque de radiação acústico depende das propriedades físicas da partícula espalhadora s_n e das características do feixe incidente através dos a_{nm} .

No limite de espalhamento de Rayleigh, as componentes cartesianas adimensionais do torque podem ser calculadas considerando somente os coeficientes de espalhamento de

monopolo s_0 e dipolo s_1 . Por conseguinte, obtemos

$$N_x + iN_y = -\frac{\sqrt{2}}{\pi(ka)^3} \left[\left(\frac{s_1 + s_1^*}{2} + |s_1|^2 \right) (a_{1,-1}a_{1,0}^* + a_{1,0}a_{1,1}^*) \right], \quad (4.60)$$

$$N_z = -\frac{1}{\pi(ka)^3} \left[\left(\frac{s_1 + s_1^*}{2} + |s_1|^2 \right) (|a_{1,1}|^2 - |a_{1,-1}|^2) \right]. \quad (4.61)$$

Substituindo os coeficientes de forma do feixe a_{nm} dados na Eq. (4.37) nas Eqs. (4.60) e (4.61), encontramos o torque de radiação acústico na aproximação monopolo-dipolo como

$$\mathbf{N}^{\text{rad}} = -\frac{i6\pi\rho_0}{k^3} \left(\frac{s_1 + s_1^*}{2} + |s_1|^2 \right) (\mathbf{v}_{\text{in}} \times \mathbf{v}_{\text{in}}^*) + O(\varepsilon^8 + i\varepsilon^7). \quad (4.62)$$

Usando a Eq. (3.41) dentro desta equação, encontramos que o torque de radiação acústico em uma partícula viscoelástica é totalmente causado devido a absorção da partícula,

$$\mathbf{N}_{\text{abs}} = i6\pi a^3 \varepsilon^2 \rho_0 g_1^{(1)} (\mathbf{v}_{\text{in}} \times \mathbf{v}_{\text{in}}^*) + O(\varepsilon^4). \quad (4.63)$$

A velocidade incidente \mathbf{v}_{in} é evoluída no centro da partícula. Para uma partícula não absorvedora $g_1^{(1)} = 0$, conseqüentemente nenhum torque de radiação acústico é produzido pela onda incidente.

4.4 Expansão assintótica do índice de refração complexo

Apesar de todas as simplificações na análise de força e torque de radiação acústico obtidas nas Eqs. (4.43)-(4.45) e (4.63), resultados analíticos não são atingíveis considerando o índice de refração complexo como dado na Eq. (2.104). Para obter resultados mais simples, é necessário efetuar uma expansão assintótica do índice de refração complexo com os tempos de relaxação adimensionais nos seguintes regimes: $(\omega\tau_j)^\nu \ll 1$ e $(\omega\tau_j)^\nu \gg 1$. Estes regimes são referidos como aproximação de baixa e alta frequência para ondas longitudinais $j = \ell$ e ondas de cisalhamento $j = s$. Note que essas expansões assintóticas foram analisadas em detalhes na Ref. [105]. Iremos recuperar parcialmente alguns resultados relevantes para os problemas de força e torque de radiação acústico presentes nessa referência.

Os tempos de relaxação adimensionais introduzem novas escalas em nossa análise. Por isso, será útil definir o seguinte parâmetro de escala $\varepsilon_j = (\omega\tau_j)^\nu$. Assumimos que o comportamento limite deste parâmetro esta relacionado com o fator tamanho da partícula $\varepsilon = ka$. Portanto, temos $\varepsilon_j = O(\varepsilon)$ para o regime de baixa frequência, e $\varepsilon_j^{-1} = O(\varepsilon)$ no regime de alta frequência.

4.4.1 Regime de baixa frequência

A expansão assintótica do índice complexo da Eq. (2.104) quando $\varepsilon_\ell, \varepsilon_s \ll 1$, corresponde ao regime em que a elasticidade domina sobre a viscosidade. Esta aproximação pode também ser vista na descrição da propagação de ondas em fluidos viscosos [106]. No regime de baixa frequência, o índice de refração complexo torna-se

$$n_c(\varepsilon_j) = 1 - \frac{(-i)^\nu}{2} \varepsilon_j + O(\varepsilon^2), \quad j \in \{\ell, s\}. \quad (4.64)$$

Fazendo referência a Eq. (2.105), reconhecemos que a absorção adimensional e índice de refração é dado, respectivamente, por

$$\tilde{\alpha}(\varepsilon_j) = \frac{\varepsilon_j}{2} \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right), \quad (4.65)$$

$$n_R(\varepsilon_j) = 1 - \frac{\varepsilon_j}{2} \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right). \quad (4.66)$$

Uma vez que a absorção adimensional deve ser sempre positiva, $\tilde{\alpha}(\varepsilon_j) > 0$, então $\nu \in (0, 2)$. Os valores ordem da derivada fracionária $\nu = 0$ e 2 são excluídos porque eles representam um material sem absorção. Vale ressaltar que, no limite de baixa frequência, o índice de refração material é menor que a unidade. Assim, a velocidade de fase $c_p(\varepsilon_j)$ é maior que a velocidade do som c_j . Além disso, utilizando as Eqs. (2.103), (4.65) e comparando com a Eq. (2.106) encontramos que a ordem da derivada fracionária ν está relacionada com o expoente de absorção da lei de potência y_0 por

$$y_0 = 1 + \nu. \quad (4.67)$$

Para calcular os coeficientes das Eqs. (3.38) e (3.39), realizamos uma expansão em série de Taylor nos coeficientes de espalhamento escalares de monopolo $s_0(\varepsilon, \varepsilon_\ell, \varepsilon_s)$ e dipolo $s_1(\varepsilon, \varepsilon_\ell, \varepsilon_s)$ dados na Eq. (3.37) em torno de $\varepsilon = 0$ para obter Eqs. (3.38) e (3.39). Uma vez que os tempos de relaxação são constantes, os parâmetros escalares ε_ℓ e ε_s são parametrizados por uma frequência angular ω . Portanto, usando a relação $\varepsilon_\ell = (\tau_\ell/\tau_s)^\nu \varepsilon_s$, nós executamos uma outra expansão em série de Taylor nas imediações de $\varepsilon_s = 0$. As expansões foram realizadas no software MATHEMATICA [101]. Finalmente, obtemos os coeficientes no limite de baixa frequência como

$$f_0^{(R)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) = f_0^{(E)} + \frac{\rho_0 c_0^2 [\varepsilon_\ell - (4/3)(c_s/c_\ell)^2 \varepsilon_s]}{\rho_1 c_\ell^2 [1 - (4/3)(c_s/c_\ell)^2]^2} \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + O(\varepsilon^2), \quad (4.68)$$

$$f_0^{(I)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) = -\frac{\rho_0 c_0^2 [\varepsilon_\ell - (4/3)(c_s/c_\ell)^2 \varepsilon_s]}{\rho_1 c_\ell^2 [1 - (4/3)(c_s/c_\ell)^2]^2} \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) + O(\varepsilon^2), \quad (4.69)$$

$$f_1^{(R)} = \frac{2(\rho_1 - \rho_0)}{2\rho_1 + \rho_0}, \quad (4.70)$$

$$g_1^{(I)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) = -\frac{f_0^{(I)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s)}{5(\rho_0/\rho_1 + 2)^2} + O(\varepsilon^2). \quad (4.71)$$

O coeficiente $f_0^{(E)}$ é dado por

$$f_0^{(E)} = 1 - \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_1 c_\ell^2 [1 - (4/3)(c_s/c_\ell)^2]}. \quad (4.72)$$

4.4.2 Regime de alta frequência

No outro extremo, temos o limite de alta frequência $\varepsilon_\ell, \varepsilon_s \gg 1$, no qual a viscosidade supera a elasticidade. Neste caso, o índice de refração complexo da Eq. (2.103) é expresso por

$$n_c(\varepsilon_j) = (-i)^{-\nu/2} \varepsilon_j^{-1/2} + O(\varepsilon_j^{3/2}), \quad j \in \{\ell, s\}. \quad (4.73)$$

A partir desta equação, observamos que a absorção adimensional e índice de refração é dado por

$$\tilde{\alpha}(\varepsilon_j) = \varepsilon_j^{-1/2} \sin\left(\frac{\pi\nu}{4}\right), \quad (4.74)$$

$$n_R(\varepsilon_j) = \varepsilon_j^{-1/2} \cos\left(\frac{\pi\nu}{4}\right). \quad (4.75)$$

Note que o índice de refração tem ordem $n_R(\varepsilon_j) = O(\varepsilon_j^{-1/2})$. Assim, a velocidade de fase da onda é muito maior que a velocidade do som longitudinal e de cisalhamento.

Para determinar o intervalo de variação do parâmetro ν , notamos que tanto a absorção adimensional $\tilde{\alpha}(\varepsilon_j)$ como o índice de refração n_R deverão ser positivos, pelo menos para o material viscoelástico. Assim, o intervalo máximo desse parâmetro é $\nu \in (0, 2)$. Baseados nas análises das aproximações de baixa e alta frequência, concluímos que a ordem da derivada fracionária ν definida na Eq. (2.87) deverá variar no intervalo $\nu \in (0, 2)$. Utilizando as Eqs. (2.103), (4.74) e comparando com a Eq. (2.106), encontramos a relação entre a ordem da derivada fracionária ν e o expoente de absorção da lei de potência y_0 na aproximação de alta frequência é

$$y_0 = 1 - \frac{\nu}{2}. \quad (4.76)$$

Para calcular os coeficientes de monopolo e dipolo, nas Eqs. (3.38) e (3.39), desenvolvemos um procedimento semelhante ao regime de baixa frequência descrito na Seção 4.4.1. No entanto, a última expansão em série de Taylor é realizada com $\varepsilon_s \rightarrow \infty$. Consequentemente, os coeficientes no limite de alta frequência são

$$f_0^{(R)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) = 1 - \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_1 c_\ell^2} \frac{\cos(\pi\nu/2)}{[\varepsilon_\ell - (4/3)(c_s/c_\ell)^2 \varepsilon_s]} + O(\varepsilon^2), \quad (4.77)$$

$$f_0^{(I)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) = -\frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_1 c_\ell^2} \frac{\sin(\pi\nu/2)}{[\varepsilon_\ell - (4/3)(c_s/c_\ell)^2 \varepsilon_s]} + O(\varepsilon^2), \quad (4.78)$$

$$g_1^{(I)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) = -\frac{f_0^{(I)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s)}{5(\rho_0/\rho_1 + 2)^2} + O(\varepsilon^2). \quad (4.79)$$

O coeficiente $f_1^{(R)}$ é o mesmo do regime de baixa frequência dado na Eq. (4.70).

Neste capítulo foram demonstradas as expressões analíticas para força e torque de

radiação acústico sobre uma partícula esférica utilizando o método de campo distante, com ênfase na aproximação monopolo-dipolo dos coeficientes de espalhamento Rayleigh. Além disso, efetuamos uma expansão assintótica do índice de refração complexo em dois regimes (baixa e alta frequência) para obter resultados mais simples de serem analisados. Esse estudo será a base para nossas discussões no próximo capítulo, onde investigaremos o efeito da força e torque de radiação acústico sobre uma partícula viscoelástica para três diferentes frentes de onda.

Resultados e discussões

Partículas suspensas em um fluido e expostas a um campo acústico serão afetadas por uma força de radiação acústica. Aplicações que utilizam o movimento de um objeto devido ao fenômeno de força de radiação tornaram-se um método promissor em biotecnologia [3],[7]–[15]. Entre essas aplicações, podemos citar manipulação de partículas sem contato, incluindo células biológicas e outros microrganismos, e levitação acústica [16]–[19]. Além disso, partículas como células biológicas ou polímeros se comportam como sólido viscoelástico linear sob pequenas amplitudes da tensão [84]. Portanto, uma investigação mais ampla sobre como a viscoelasticidade da partícula afeta a força e o torque de radiação acústico na aproximação de Rayleigh será apresentada nesse capítulo. Para ilustrar, iremos analisar esses fenômenos atuando sobre uma pequena partícula suspensa em um fluido ideal devido a interação com uma onda acústica de três tipos: uma onda plana progressiva, onda plana estacionária e feixe de Bessel. Para tal análise, iremos considerar uma partícula de polietileno de baixa densidade e outra de alta densidade.

5.1 Exemplos de ondas acústicas

Considere um feixe acústico que se propaga na direção axial, isto é, no eixo z . Uma partícula viscoelástica de raio a é colocada no trajeto da onda. Neste cenário, duas funções relevantes serão utilizadas mais adiante, a intensidade média incidente \mathbf{I}_{in} e a componente axial do fluxo de momento. Estas funções são dadas em termos da pressão incidente p_{in} e da velocidade do fluido v_{in} , respectivamente, por

$$\mathbf{I}_{\text{in}} = \frac{1}{2} \text{Re}[p_{\text{in}} v_{\text{in}}^*], \quad (5.1)$$

$$\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{in}} \mathbf{v}_{\text{in}}^* |_z = \rho_0 [\partial_x (v_{\text{in},x} v_{\text{in},z}^*) + \partial_y (v_{\text{in},y} v_{\text{in},z}^*)], \quad (5.2)$$

onde ρ_0 é densidade do fluido, $\partial_x = \partial/\partial x$ e $\partial_y = \partial/\partial y$.

Além disso, é útil definir a magnitude da força de radiação acústica como

$$F_0 = \frac{\pi a^2 I_0}{c_0}, \quad (5.3)$$

onde $I_0 = \rho_0 c_0 v_0^2 / 2$ é a magnitude da intensidade média incidente com v_0 sendo a magnitude da velocidade do fluido na fonte acústica e c_0 a velocidade de propagação do som no fluido ideal.

5.1.1 Onda plana progressiva

Considere a amplitude do potencial de velocidade $\phi_{\text{in}}(z)$ de uma onda plana progressiva (OPP) como

$$\phi_{\text{in}}(z) = \frac{v_0}{k} e^{ikz}, \quad (5.4)$$

onde k é o número de onda.

As amplitudes da pressão incidente e da velocidade do fluido são $p_{\text{in}} = i\rho_0 c_0 v_0 e^{ikz}$ e $v_{\text{in},z} = iv_0 e^{ikz}$, respectivamente. A partir da Eq. (5.1) encontramos que a intensidade média incidente é $I_z = I_0$ e o divergente do fluxo de momento dado na Eq. (5.2) é zero. Note que a parte conservativa da força de radiação acústica, força gradiente Eq. (4.43), também é zero. Desta forma, a força de radiação acústica exercida em uma partícula viscoelástica devido a uma onda plana progressiva é predominantemente de absorção. Portanto, da Eq. (4.45), temos que a força de radiação acústica axial é dada por

$$F_{\text{rad},z}^{\text{OPP}} = F_{\text{abs},z}^{\text{OPP}}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) = -\frac{4F_0}{3} \varepsilon f_0^{(1)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) + O(\varepsilon^3). \quad (5.5)$$

A função $f_0^{(1)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s)$ é dada pelas Eqs. (4.69) e (4.78) para aproximação de baixa e alta frequência da partícula viscoelástica, respectivamente. Então a força de radiação acústica se comporta como $F_z^{\text{OPP}} = O(\varepsilon^2)$. Note que, de acordo com a Eq. (4.44), a força de radiação de espalhamento é ε^{-3} mais fraca do que a força de radiação de absorção apresentada na Eq. (5.5).

É importante ressaltar que a força de radiação acústica pode ser negativa (isto é, a força é oposta a direção de propagação do feixe), se $f_0^{(1)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) > 0$, o que conduz à seguinte condição

$$\frac{\tau_\ell}{\tau_s} < \left[\frac{4}{3} \left(\frac{c_s}{c_\ell} \right)^2 \right]^{1/\nu}, \quad (5.6)$$

onde τ_ℓ e τ_s são o tempo de relaxação longitudinal e de cisalhamento, respectivamente, c_ℓ é velocidade longitudinal, c_s é a velocidade de cisalhamento e ν é a ordem fracionária viscoelástica. Observe que essa condição é válida tanto para o regime de baixa frequência como para o regime de alta frequência. Força de radiação acústica negativa devido a uma onda plana também foi notada em uma partícula de ouro revestida com uma camada de um polímero (viscoelástico) [61].

A força de radiação acústica sobre uma partícula fluida com absorção longitudinal também é dada pela Eq. (5.5), assumindo que $\tau_s = 0$, $c_s = 0$, e $\nu = 1$ na Eq. (4.69). O resultado obtido está em acordo com a Ref. [50]. Além disso, a força de radiação acústica exercida sobre uma partícula sólida elástica pode ser obtida da Eq. (4.44) fazendo $\tau_\ell = \tau_s = 0$ na Eq. (4.68) e (4.71). O resultado está de acordo com o que foi previamente derivado na Ref. [49].

5.1.2 Onda plana estacionária

Considere uma onda plana estacionária (OPE) distribuída ao longo do eixo z . Esse tipo de onda acústica é muito importante para aplicações que envolvem força de radiação acústica. A amplitude do potencial de velocidade da onda estacionária é

$$\phi_{\text{in}}(z) = \frac{v_0}{k} \sin[k(z - h)], \quad (5.7)$$

onde h é o parâmetro de deslocamento, que representa a distância do primeiro nó para a origem do sistema de coordenadas.

Os campos acústicos incidentes são $p_{\text{in}} = i\rho_0 c_0 v_0 \sin[k(z - h)]$ e $v_{\text{in}} = v_0 \cos[k(z - h)]$. Neste caso, observamos das Eqs. (5.1) e (5.2) que tanto a intensidade incidente como o fluxo de momento desaparecem. Portanto, apenas a parte conservativa da força de radiação acústica, que corresponde a força gradiente da Eq. (4.43), permanece. Consequentemente, encontramos

$$F_{\text{grad},z}^{\text{OPE}}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s; z) = -\frac{F_0}{3} \varepsilon \left[2f_0^{(\text{R})}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) + 3f_1^{(\text{R})} \right] \sin[2k(z - h)] + O(\varepsilon^2). \quad (5.8)$$

Este resultado tem o mesmo formato que o obtido por Gorkov [27] para uma partícula fluida de compressão não absorvedora.

Na análise de aprisionamento de partículas, é útil definir um fator de contraste acústico como

$$\mathcal{C}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) \equiv 3 \frac{\rho_1 - \rho_0}{2\rho_1 + \rho_0} + f_0^{(\text{R})}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s), \quad (5.9)$$

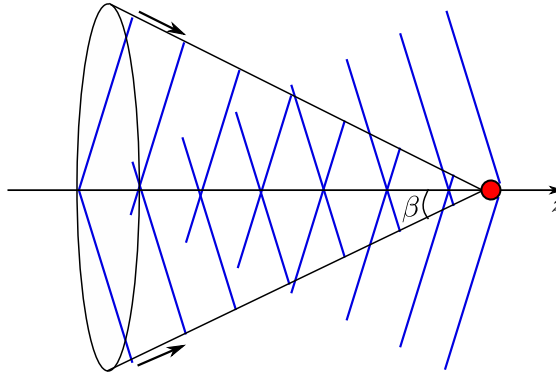
onde esse fator contém as propriedades físicas do meio e da partícula. O fator de contraste determina se uma partícula tem um ponto de equilíbrio estável em um nó de pressão $\mathcal{C} > 0$ ou em um anti-nó $\mathcal{C} < 0$. A função $f_0^{(\text{R})}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s)$ é dada pelas Eqs. (4.68) e (4.77) para o regime de baixa e alta frequência, respectivamente.

5.1.3 Feixe de Bessel acústico

Feixes de Bessel não difratantes, isto é, feixes que se propagam por uma distância infinita sem sofrer difração por uma abertura infinita, denotam uma solução exata da equação homogênea de Helmholtz expressas em coordenadas cilíndricas [107]. No entanto, em situações reais, o efeito de difração não pode ser desprezado, apenas aproximações para esses feixes podem ser obtidos por aberturas finitas mantendo o perfil do feixe ao longo de uma grande distância axial. Esses feixes geralmente são chamados de feixes de difração limitada.

Considere um feixe de Bessel de n -ésima ordem se propagando ao longo do eixo z como mostrado na Fig. 5.1. O feixe encontra uma partícula posicionada sobre seu eixo. A escolha natural de um conjunto de variáveis para descrever esse feixe é o sistema de coordenadas cilíndricas (ϱ, φ, z) , onde $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância radial transversal e $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$ é o ângulo azimutal. A amplitude do potencial de velocidade do feixe é

Figura 5.1: Feixe de Bessel representado por uma superposição de ondas planas com β sendo o ângulo de meio cone. O círculo vermelho representa a partícula.



Fonte: Autor, 2015.

dado por [108]

$$\phi_{n,\text{in}}(\varrho, \varphi, z) = \frac{v_0}{k} e^{i(kz \cos \beta + n\varphi)} J_n(k\varrho \sin \beta), \quad (5.10)$$

onde J_n é a função de Bessel de ordem n , $\beta \in [0, \pi/2]$ é o ângulo de meio cone, $n \in \mathbb{Z}$ é conhecido como o número de momento angular orbital. A intensidade média de um feixe de Bessel de ordem n é encontrada calculando a pressão, Eq. (3.2), e a velocidade incidente, Eq. (3.3), e substituindo o resultado obtido na Eq. (5.1),

$$\mathbf{I}_{\text{in}} = \frac{nJ_n^2(k\varrho \sin \beta)}{k\varrho} \mathbf{e}_\varphi + J_n^2(k\varrho \sin \beta) \cos \beta \mathbf{e}_z, \quad (5.11)$$

onde \mathbf{e}_φ e \mathbf{e}_z são vetores unitários em coordenadas cilíndrica.

Devido a simetria do problema, somente a componente axial da força de radiação acústica surge na partícula. Obteremos a intensidade axial incidente e o fluxo de momento no centro da partícula $\varrho = 0$. Para isso, substituímos a Eq. (5.10) nas Eqs. (3.2) e (3.3), e utilizamos o resultado dentro das Eqs.(5.1) e (5.2), assim

$$I_{n,z} = I_0 \delta_{n,0} \cos \beta, \quad (5.12)$$

$$\nabla \cdot \rho_0 \mathbf{v}_{n,\text{in}} \mathbf{v}_{n,\text{in}}^* |_{z=0} = i\gamma_n k \frac{I_0}{c_0} \cos \beta \sin^2 \beta, \quad (5.13)$$

onde δ_{nm} é a função delta de Kronecker, que vale um se $m = n$ ou zero, caso contrário. O coeficiente γ_n é definido como $\gamma_0 = 2$, $\gamma_{\pm 1} = -1$, e $\gamma_n = 0$, para $|n| = 2, 3, \dots$

Note que a força de radiação acústica axial devido a um feixe de Bessel de ordem zero (FBOZ) é gerada principalmente pela absorção dentro da partícula viscoelástica, pois a força gradiente na Eq. (4.43) é zero para esse feixe. Assim, substituímos a Eq. (5.12) na Eq. (4.45), encontramos que esta força está relacionada com a força de radiação acústica axial causada por uma onda plana progressiva,

$$F_{\text{abs},z}^{\text{FBOZ}}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) = F_{\text{abs},z}^{\text{OPP}}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) \cos \beta + O(\varepsilon^3). \quad (5.14)$$

Assim, a força de radiação acústica axial pode ser negativa se a condição dada na Eq. (5.6) é satisfeita.

Para obter a força de radiação acústica em uma partícula fluida de compressão a partir da Eq. (5.14), substituímos $\tau_s = 0$, $c_s = 0$, e $\nu = 1$ na Eq. (4.69). O resultado obtido é o mesmo que é dado na Eq. (45) da Ref. [50],

$$F_{\text{abs},z}^{(\text{Fluida})}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) = \frac{\pi a^2 I_0}{c_0} \left[\frac{8 \rho_0 c_0^2}{3 \rho_1 c_\ell^2} \tilde{\alpha} \varepsilon \delta_{n,0} \cos \beta - \frac{12 \gamma_n \rho_0 c_0^2}{5 \rho_1 c_\ell^2 (\rho_0 / \rho_1 + 2)^2} \tilde{\alpha} \varepsilon^3 \cos \beta \sin^2 \beta \right]. \quad (5.15)$$

Agora, considere um feixe de Bessel de ordem superior, descrito pela Eq. (5.10) com $|n| > 0$. Nesse caso, a intensidade axial é zero. Assim, a força de radiação acústica também tem a contribuição da componente de espalhamento. Portanto, substituímos as Eqs. (5.12) e (5.13) nas Eqs. (4.44) e (4.45) e encontramos que somente o feixe de Bessel de primeira ordem (FBPO), com $n = \pm 1$, produz força de radiação acústica axial em partículas de Rayleigh ,

$$\begin{aligned} F_z^{\text{FBPO}}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) &= F_{\text{abs},z}^{\text{FBPO}} + F_{\text{sca},z}^{\text{FBPO}} \\ &= 6F_0 \varepsilon^3 \cos \beta \sin^2 \beta \left[g_1^{(1)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) + \varepsilon \frac{f_1^{(\text{R})2}}{36} \right] + O(\varepsilon^5). \end{aligned} \quad (5.16)$$

A função $g_1^{(1)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s)$ é dada pelas Eq. (4.71) e (4.79) para a aproximação de baixa e alta frequência, respectivamente.

Força de radiação acústica axial negativa também pode ocorrer sobre a partícula no regime de baixa frequência se $g_1^{(1)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) + f_1^{(\text{R})2} \varepsilon / 36 < 0$. Quando a densidade da partícula tem um valor aproximado da densidade do fluido ideal, isto é $\rho_1 \approx \rho_0$, a condição para a força de radiação acústica ser negativa é a mesma para uma onda plana progressiva dada na Eq. (5.6). Note também que a força de radiação acústica em uma partícula elástica pode ser obtida através da Eq. (5.16), fazendo $\tau_\ell = \tau_s = 0$ na Eq. (4.71), e portanto $g_1^{(1)}(0, 0) = 0$.

Tendo em vista que tanto o feixe de Bessel de ordem zero como o feixe de Bessel de primeira ordem podem produzir força de radiação acústica negativa, analisamos a estabilidade da força de radiação acústica transversal. Fazendo essa análise, queremos verificar se os feixes de Bessel de ordem zero e de primeira ordem podem se comportar como feixe trator 3D para pequenas partículas viscoelásticas. Para analisar a estabilidade da partícula na vizinhança do eixo do feixe iremos calcular a energia potencial. Para isso, em primeiro lugar, calculamos a pressão e a velocidade do fluido incidente através das Eqs. (3.2), (3.3) e (5.10) para um feixe de Bessel de ordem n . Em seguida, obtemos a energia potencial da força de radiação gradiente como dado na Eq. (4.43). Assim,

encontramos que

$$U_n(\varrho) = aF_0 \left\{ \left[\frac{2}{3} f_0^{(R)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) - \left(\frac{n^2}{k^2 \varrho^2} + \cos^2 \beta \right) f_1^{(R)} \right] J_n^2(k\varrho \sin \beta) - f_1^{(R)} J_n^2(k\varrho \sin \beta) \sin^2 \beta \right\}, \quad (5.17)$$

onde o símbolo J' denota a derivada com relação ao argumento da função. A energia potencial devido ao feixe de Bessel de ordem zero ($n = 0$) e de ordem um ($n = \pm 1$) tem um extremo (mínimo ou máximo) no eixo do feixe $\varrho = 0$. A energia potencial mínima corresponde a força de radiação acústica transversal convergente, desta forma, se a força de radiação acústica axial é negativa, o feixe de Bessel atua como um feixe trator 3D sobre a partícula. Portanto, fazendo a derivada de segunda ordem da Eq. (5.17) com relação a ϱ , encontramos a condição para obter um feixe trator para um feixe de Bessel de ordem zero e de ordem um, respectivamente,

$$[3 + 9 \cos(2\beta)] f_1^{(R)} - 8 f_0^{(R)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) > 0, \quad (5.18)$$

$$2 f_0^{(R)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) - 3 f_1^{(R)} \cos(2\beta) > 0. \quad (5.19)$$

É interessante notar que para $\beta = 45^\circ$ estas condições tornam-se $f_0^{(R)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) < (3/8) f_1^{(R)}$ e $f_0^{(R)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) > 0$.

Utilizando o resultado da intensidade média, Eq.(5.11), encontramos que a força de radiação acústica transversal é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n,\perp}(\varrho) &= \mathbf{F}_{\text{grad}} + \mathbf{F}_{\text{abs}} \\ &= -\partial_\varrho U_n(\varrho) \mathbf{e}_\varrho - 4F_0 n \varepsilon f_0^{(1)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) \frac{J_n^2(k\varrho \sin \beta)}{3k\varrho} \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Note que a força de radiação acústica devido ao feixe de Bessel de ordem zero não tem componente na direção azimutal.

Agora, voltamos nossa atenção para o torque de radiação acústico axial gerado na partícula viscoelástica por um feixe de Bessel. Antes de prosseguir com esta análise, temos que obter a componente transversal da velocidade do fluido incidente no eixo do feixe. Utilizando a Eq. (5.10) na Eq. (3.3) concluímos que somente o feixe de Bessel de primeira ordem possui velocidade do fluido transversal em $\varrho = 0$,

$$v_{\text{in},\varrho}^{\text{FBPO}}(0, \varphi, z) = \frac{v_0}{2} n \delta_{n,\pm 1} \sin \beta e^{i(kz \cos \beta + n\varphi)}, \quad (5.21)$$

$$v_{\text{in},\varphi}^{\text{FBPO}}(0, \varphi, z) = \frac{iv_0}{2} \delta_{n,\pm 1} \sin \beta e^{i(kz \cos \beta + n\varphi)}. \quad (5.22)$$

A componente axial do produto vetorial entre a velocidade do fluido incidente e seu complexo conjugado é dada por em coordenadas cilíndricas por

$$(\mathbf{v}_{\text{in}} \times \mathbf{v}_{\text{in}}^*)_z = 2i \text{Im}[v_{\text{in},\varrho} v_{\text{in},\varphi}^*]. \quad (5.23)$$

Assim, usando Eqs. (5.21) e (5.22) na Eq. (5.23), encontramos que o torque de radiação acústico é originado somente pelo feixe de Bessel de primeira ordem,

$$N_{\text{abs},z}^{\text{FOBB}}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) = 6aF_0n\delta_{n,\pm 1}\varepsilon^2 g_1^{(1)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) \sin^2 \beta + O(\varepsilon^4), \quad (5.24)$$

onde a função $g_1^{(1)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s)$ é dada para os regimes de baixa e alta frequência respectivamente, pelas Eqs. (4.71) e (4.79).

A direção do torque de radiação acústico axial depende do sinal de $ng_1^{(1)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s)$. Se $g_1^{(1)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) > 0$, o torque de radiação acústico axial segue a direção do momento angular do feixe de Bessel de primeira ordem. Por outro lado, quando $g_1^{(1)}(\varepsilon_\ell, \varepsilon_s) < 0$, o torque de radiação acústico axial tem direção oposta ao momento angular do feixe. Nós nos referimos a essa situação como torque de radiação axial negativo. De acordo com as Eqs. (4.71) e (4.79) isso acontece quando a condição de força de radiação acústica negativa na Eq. (5.6) é satisfeita.

5.2 Resultados e discussões para partículas de polietileno

Vamos avaliar a força e o torque de radiação acústico numericamente considerando uma partícula esférica de polietileno de baixa densidade (PEBD) e de polietileno de alta densidade (PEAD). Polietileno é o plástico mais produzido no mundo. Isso o torna abundantemente disponível para experimentos destinados a verificação da teoria de força e torque de radiação acústico desenvolvido neste trabalho. Para prosseguir com a avaliação numérica, precisamos de todos os parâmetros acústicos que descrevem o polietileno. Em geral, a densidade e a velocidade do som longitudinal e de cisalhamento para esse material a temperatura ambiente são dados em tabelas padrões. No entanto, a ordem fracionária viscoelástica ν e os tempos de relaxação longitudinal τ_ℓ e de cisalhamento τ_s , não são facilmente encontrados na literatura. Portanto, vamos estimar estes parâmetros a partir de dados experimentais de absorção longitudinal e de cisalhamento em função da frequência obtida por espectroscopia de ultrassom apresentados na Ref. [109].

5.2.1 Estimativa dos parâmetros do polietileno

Para obter a ordem fracionária viscoelástica ν e os tempos de relaxação τ_ℓ , τ_s , realizamos um ajuste dos dados experimentais de absorção versus frequência para o polietileno dado nas figuras 4 e 5 da Ref. [109]. A função que utilizamos para fazer o ajuste é obtida através da parte imaginária da relação de dispersão dada na Eq. (2.103),

$$\alpha_j(\omega) = -\frac{\omega}{c_j} \sin \left\{ \frac{1}{2} \arg[1 + (\omega\tau_j)^\nu e^{-i\pi\nu/2}] \right\} \\ \times \left\{ [1 + (\omega\tau_j)^\nu \cos(\pi\nu/2)]^2 + (\omega\tau_j)^{2\nu} \sin^2(\pi\nu/2) \right\}^{-1/4}, \quad (5.25)$$

Tabela 5.1: Parâmetros e medidas da qualidade do ajuste para a função de absorção na Eq. (5.25) e dados experimentais de absorção longitudinal e de cisalhamento extraídos das Fig. 4 e 5 da Ref. [109].

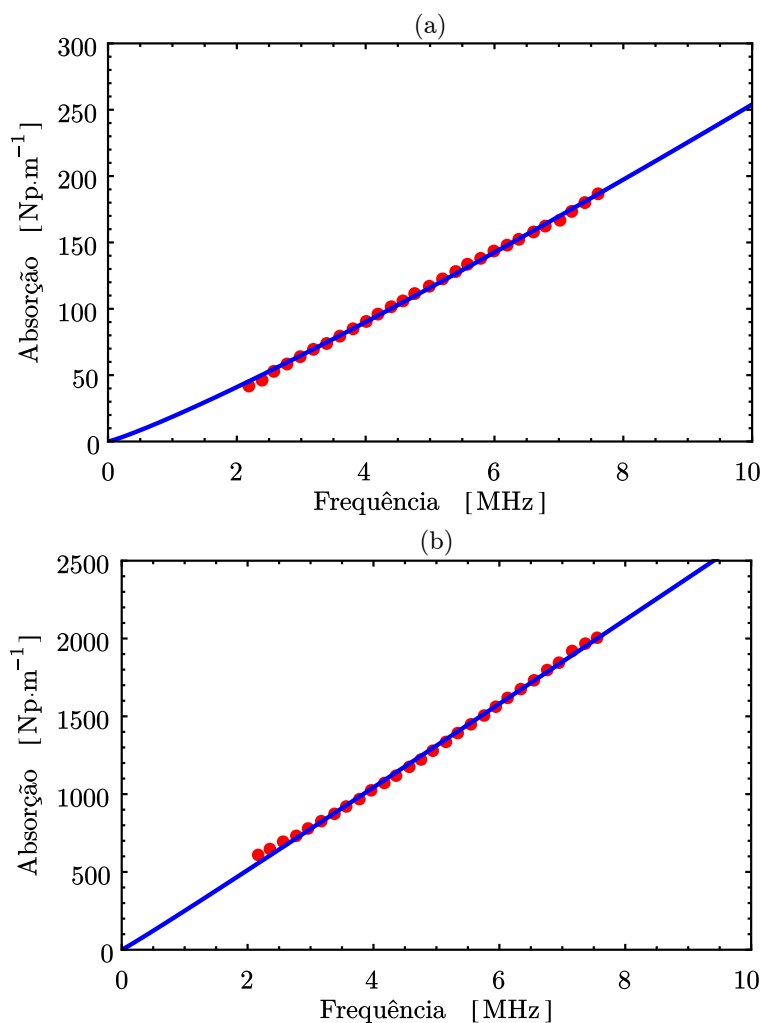
	PEBD	PEAD
Modo longitudinal		
Tempo de relaxação τ_ℓ [s]	1.27×10^{-2}	2.27×10^{-15}
Ordem fracionária viscoelástica ν	0.37	0.15
Erro padrão	1.79×10^{-4}	1.09×10^{-11}
Coefficiente de determinação (R^2)	0.9998	0.9998
Modo de cisalhamento		
Tempo de relaxação τ_s [s]	3.34×10^{-4}	2.39×10^{-7}
Ordem fracionária viscoelástica ν	0.37	0.14
Erro padrão	8.56×10^{-6}	3.56×10^{-8}
Coefficiente de determinação (R^2)	0.9994	0.9997

Fonte: Autor, 2015.

onde ‘arg’ é a função argumento, que dá o ângulo entre a linha de posição de um número complexo e o eixo real. A partir da equação (5.25), é possível determinar os parâmetros ν e o tempo de relaxação τ_j com $j = \{\ell, s\}$ através do ajuste dos dados experimentais obtidos nas figuras 4 e 5 da Ref. [109]. Construímos uma tabela com os dados de absorção longitudinais e de cisalhamento do polietileno em função da frequência. Os dados são colhidos manualmente a partir das Figs. 4 e 5 da Ref. [109] utilizando WebPlotDigitizer, um software online gratuito [110]. Os parâmetros de ajuste são obtidos utilizando o software MATHEMATICA através do algoritmo de Levenberg-Marquardt [111]. Na tabela 5.1, apresentamos os parâmetros estimados com o erro padrão correspondente e o coeficiente de determinação (R^2). Estes parâmetros podem ser entendidos da seguinte forma. O erro padrão que se aproxima de zero dá uma indicação de bom ajuste e o coeficiente de determinação R^2 fornece uma medida que determina como o modelo explica a variabilidade dos dados. Esse coeficiente varia de $0 \leq R^2 \leq 1$, com $R^2 = 1$ indica que o modelo explica toda a variação de dados em torno de sua média. Além disso, podemos observar nas Figuras 5.2 e 5.3 para uma partícula de PEAD e de PEBD, respectivamente, excelente concordância entre os dados experimentais de absorção e a função de ajuste dado pela Eq. (5.25).

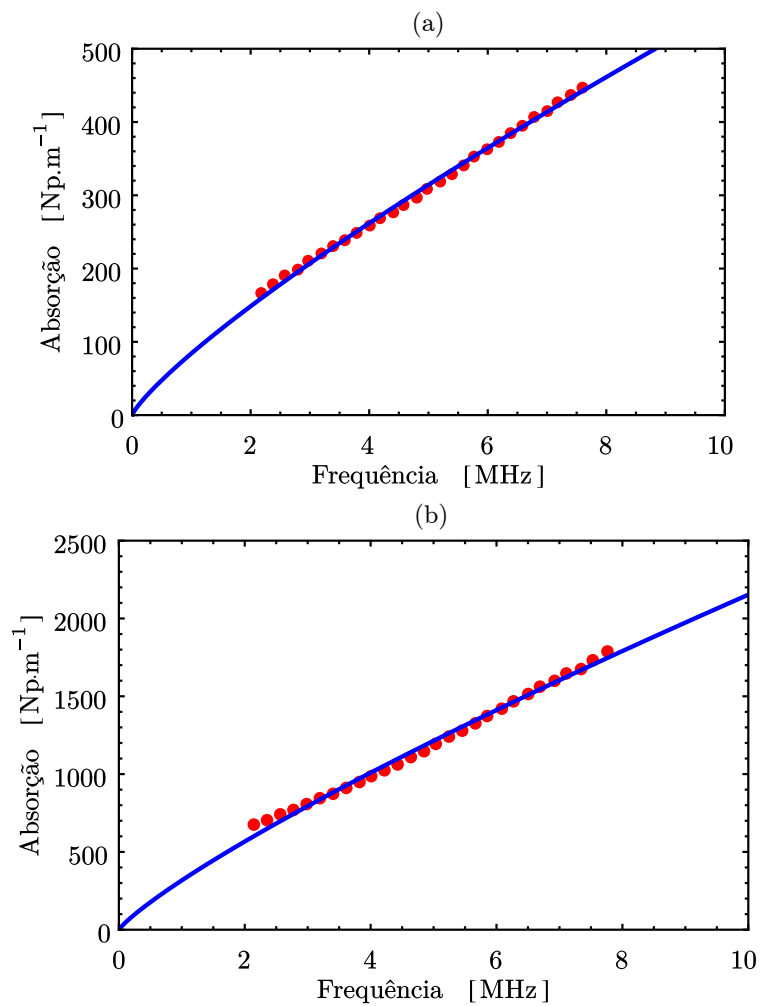
As propriedades físicas e os parâmetros de ajustes do polietileno obtidos através da Ref. [109] estão resumidos na tabela 5.2. É importante notar que o expoente da lei de potência de absorção para (PEBD) e (PEAD) é respectivamente, $y_0 = 1 - \nu/2 = 0.815$ e $y_0 = 1 + \nu = 1.15$. Esses valores estão em excelente concordância com o que foi obtido na Ref. [87].

Figura 5.2: Ajuste da função de absorção da Eq. (5.25) dos dados experimentais de absorção longitudinal (a) e de cisalhamento (b) extraídos das Fig. 4 e 5 da Ref. [109] para uma partícula de Polietileno de alta densidade (PEAD). Legenda: linha sólida azul representa o ajuste da função de absorção dada na Eq. (5.25), pontos vermelhos representam os dados experimentais dado nas Fig. 4 e 5 da Ref. [109].



Fonte: Autor, 2015.

Figura 5.3: Ajuste da função de absorção da Eq. (5.25) dos dados experimentais de absorção longitudinal (a) e de cisalhamento (b) extraídos das Fig. 4 e 5 da Ref. [109] para uma partícula de Polietileno de baixa densidade (PEBD). Legenda: linha sólida azul representa o ajuste da função de absorção dada na Eq. (5.25), pontos vermelhos representam os dados experimentais dado nas Fig. 4 e 5 da Ref. [109].



Fonte: Autor, 2015.

Tabela 5.2: Propriedades físicas e os parâmetros de ajustes da partícula de polietileno de baixa densidade (PEBD) e do polietileno de alta densidade (PEAD). Os dados foram extraídos à temperatura ambiente (20° C) na Ref. [109]

	Polietileno	
	PEBD	PEAD
Densidade ρ_1 [kg/m ³]	896	930
Velocidade do som longitudinal c_ℓ [m/s]	2566	2380
Velocidade do som cisalhamento c_s [m/s]	1273	987
Tempo de relaxação longitudinal τ_ℓ [s]	1.27×10^{-2}	2.27×10^{-15}
Tempo de relaxação de cisalhamento τ_s [s]	3.34×10^{-4}	2.39×10^{-7}
Ordem fracionária viscoelástica ν	0.37	0.15

Fonte: Autor, 2015.

5.2.2 Análise dos parâmetros de escala

Considere uma partícula viscoelástica suspensa na água em temperatura ambiente. A água é caracterizada por sua densidade $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ e pela velocidade de som adiabática $c_0 = 1500 \text{ m/s}$. Os feixes incidentes têm pico de intensidade $I_0 = 30 \text{ kW/m}^2$. Nossa análise abrange uma faixa de frequência de 10 Hz a 10 MHz. Isto corresponde a uma faixa de frequência razoável para desenvolvimentos de experimentos de manipulação de partículas e dispositivos de pinças acústicas.

A análise da partícula de polietileno de alta densidade (PEAD) com raio $a = 1 \text{ mm}$ abrangendo uma faixa de frequência de 10 Hz a 100 kHz, será considerado aproximação de baixa frequência. Neste caso, os parâmetros de escala encontram-se nos intervalos

$$\begin{aligned}
 0.012 < \varepsilon_\ell < 0.047, \\
 0.18 < \varepsilon_s < 0.75, \\
 4.1 \times 10^{-5} < \varepsilon < 0.42.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

A análise de alta frequência é feita considerando uma partícula de PEBD de raio $a = 10 \mu\text{m}$ em uma faixa de frequência de 2 a 10 MHz. Nesse caso, os parâmetros de escala satisfazem aos intervalos

$$\begin{aligned}
 0.0065 < \varepsilon_\ell^{-1} < 0.012, \\
 0.025 < \varepsilon_s^{-1} < 0.046, \\
 0.084 < \varepsilon < 0.42.
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Na análise a seguir, o raio da partícula a e o comprimento de onda incidente λ são muito maiores do que os limites de fronteira térmica e viscosa: $a, \lambda \gg \delta_t, \delta_v$. Além disso, vamos comparar a aproximação da força de radiação acústica axial devido a onda plana progressiva e de um feixe de Bessel de primeira ordem (denotados por F_z) dados, respectivamente, nas Eqs. (5.5) e (5.16) com a força de radiação acústica axial $F_{\text{rad},z}$ na aproximação monopolo-dipolo dada na Eq. (4.41). O erro absoluto entre as fórmulas de

força de radiação acústica é definido como

$$\Delta \equiv \frac{|F_{\text{rad},z} - F_z|}{F_0}, \quad (5.28)$$

onde a magnitude da força de radiação acústica é $F_0 = 6.28 \mu\text{N}$, 6.28nN para as partículas PEAD e PEBD, respectivamente. Quando consideramos o torque de radiação acústico, o erro absoluto é definido da seguinte forma:

$$\Delta \equiv \frac{|N_{\text{rad},z} - N_{\text{abs},z}^{\text{FBPO}}|}{aF_0}. \quad (5.29)$$

5.2.3 Ondas progressivas

Nas Figuras 5.4 e 5.5, ilustramos a força de radiação acústica axial versus frequência gerada nas partículas de PEBD e PEAD. A força de radiação por uma onda plana progressiva (OPP) é mostrada na Figura 5.4, enquanto que a Figura 5.5 apresenta o resultado para um feixe de Bessel de primeira ordem (FBPO) com $n = 1$ e ângulo de meio cone $\beta = 45^\circ$.

Observe que a força de radiação axial sobre a partícula de PEAD é negativa para ambos os feixes, OPP e FBPO, como pode ser visto nas Figuras 5.4(a) e 5.5(a). Isto poderia ter sido antecipado, de acordo com a Tabela 5.2 os tempos de relaxação do PEAD satisfazem a condição $\tau_\ell \ll \tau_s$. Desta forma, a condição de força de radiação negativa Eq. (5.6) é satisfeita. Além disso, a densidade do PEAD é próxima da densidade da água, isto assegura que a Eq. (5.6) também é condição de força de radiação negativa para o feixe de Bessel de primeira ordem.

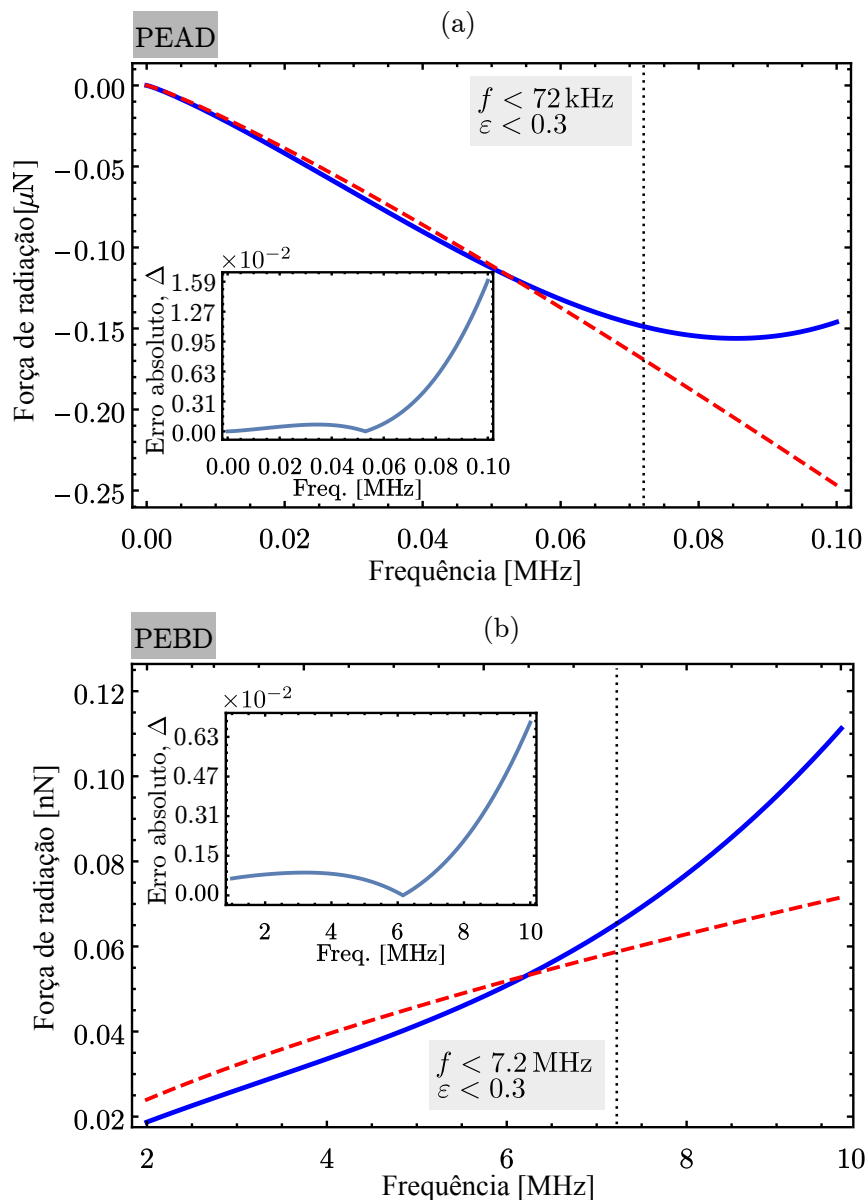
A força de radiação acústica F_z dada na Eq. (5.5) para onda plana progressiva e na Eq. (5.16) para o feixe de Bessel de primeira ordem, tem boa concordância com a fórmula da aproximação monopolo-dipolo da Eq. (4.41) para frequências até 72 kHz, ou $\varepsilon = 0.30$, como pode ser visto nas Figuras 5.4(a) e 5.5(a), respectivamente. Nesta faixa, o erro absoluto para onda plana progressiva é de $\Delta \sim \varepsilon^3$, enquanto que para o feixe de Bessel de primeira ordem é de $\Delta \sim \varepsilon^5$. Isto está de acordo com o erro previsto nas Eqs. (5.5) e (5.16), respectivamente. Entretanto, devemos ter em mente que o limite de espalhamento Rayleigh é válido para $\varepsilon < 0.3$, ou como mencionado anteriormente para frequências menores que 72 kHz.

A força de radiação acústica axial sobre a partícula de PEBD é positiva em ambos os casos, como pode ser visto nas Figuras 5.4(b) e 5.5(b). O erro absoluto para a onda plana progressiva é da ordem $\Delta \sim \varepsilon^2$ no intervalo de 2 à 7.2 MHz, ou $0.08 < \varepsilon < 0.3$. Nesse intervalo, o erro absoluto para o feixe de Bessel de primeira ordem é de $\Delta \sim \varepsilon^5$. Novamente, isto concorda com o erro mencionado nas Eqs. (5.5) e (5.16).

5.2.4 Feixe de Bessel trator

Uma vez que o feixe de Bessel de primeira ordem produz força de radiação axial negativa sobre uma partícula de PEAD, vamos analisar a força de radiação acústica

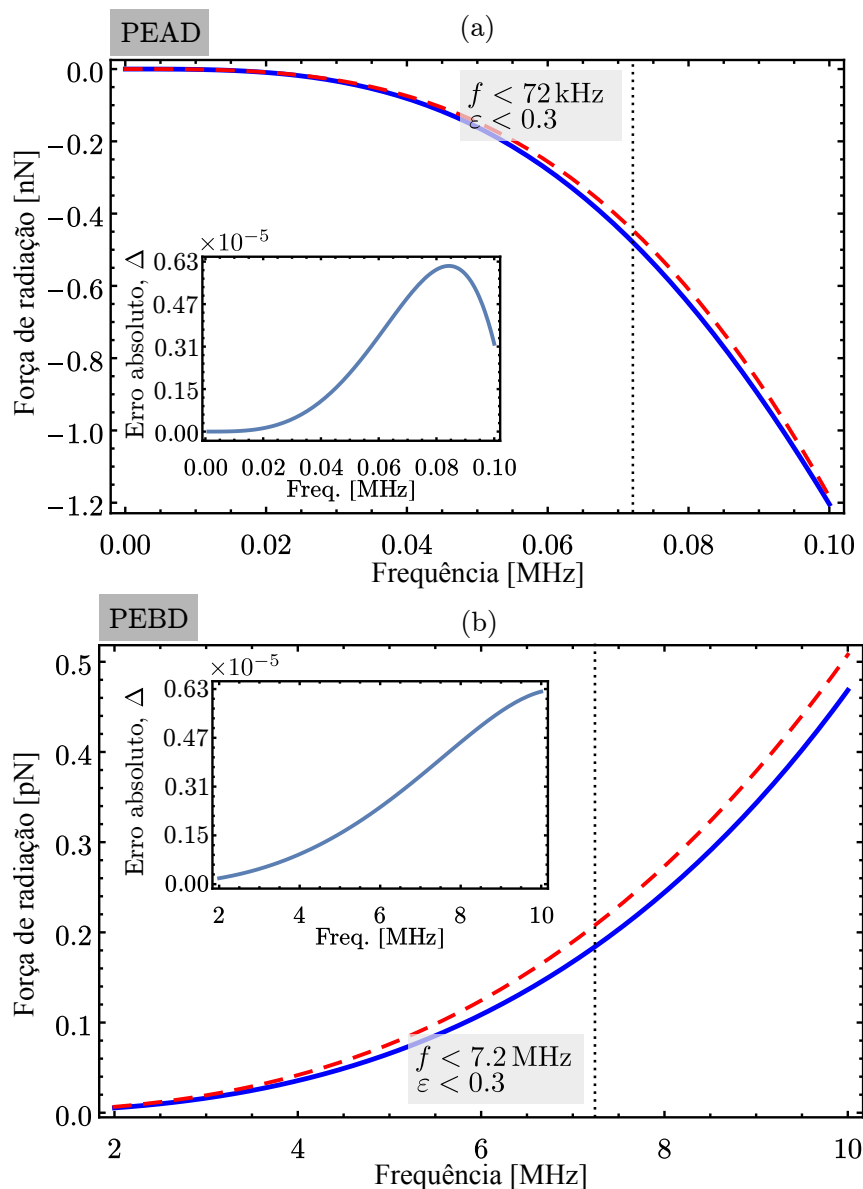
Figura 5.4: Força de radiação acústica versus frequência exercida sobre uma partícula de polietileno de alta densidade (PEAD) e de uma partícula de polietileno de baixa densidade (PEBD). As configurações são: uma onda plana progressiva agindo sobre uma partícula (a) de PEAD e (b) de PEBD. As partículas de PEAD e PEBD são suspensa em água e tem raio de $a = 1.0, 0.01$ mm, respectivamente. Os parâmetros físicos das partículas são dados na Tabela 5.2. Os feixes incidentes têm pico de intensidade de $I_0 = 30 \text{ kW/m}^2$. Legenda: linha sólida azul representa a força de radiação avaliada na aproximação monopolo-dipolo dada na Eq. (4.41), linha vermelha tracejada representa a força de radiação nos regimes de baixa e alta frequência através da Eqs. (5.5) para onda plana progressiva. Os insertes mostram o erro relativo entre a fórmulas de força de radiação. A linha vertical pontilhada delimita a região da aproximação Rayleigh, $\varepsilon < 0.3$.



Fonte: Autor, 2015.

transversal que é ilustrada na Fig. 5.6. Definimos a frequência de 50 kHz. O campo vetorial da força de radiação transversal é ilustrado pelas setas, e a energia potencial da

Figura 5.5: Força de radiação acústica versus frequência exercida sobre uma partícula de polietileno de alta densidade (PEAD) e de uma partícula de polietileno de baixa densidade (PEBD). As configurações são: feixe de Bessel de primeira ordem com $n = 1$ e $\beta = 45^\circ$ agindo sobre uma partícula de (a) PEAD e (b) de PEBD. As partículas de PEAD e PEBD são suspensa em água e tem raio de $a = 1.0, 0.01$ mm, respectivamente. Os parâmetros físicos das partículas são dados na Tabela 5.2. Os feixes incidentes têm pico de intensidade de $I_0 = 30$ kW/m². Legenda: linha sólida azul representa a força de radiação avaliada na aproximação monopolo-dipolo dada na Eq. (4.41), linha vermelha tracejada representa a força de radiação nos regimes de baixa e alta frequência através da Eq. (5.16) para feixe de Bessel de primeira ordem. Os insertes mostram o erro relativo entre a fórmulas de força de radiação. A linha vertical pontilhada delimita a região da aproximação Rayleigh, $\varepsilon < 0.3$.

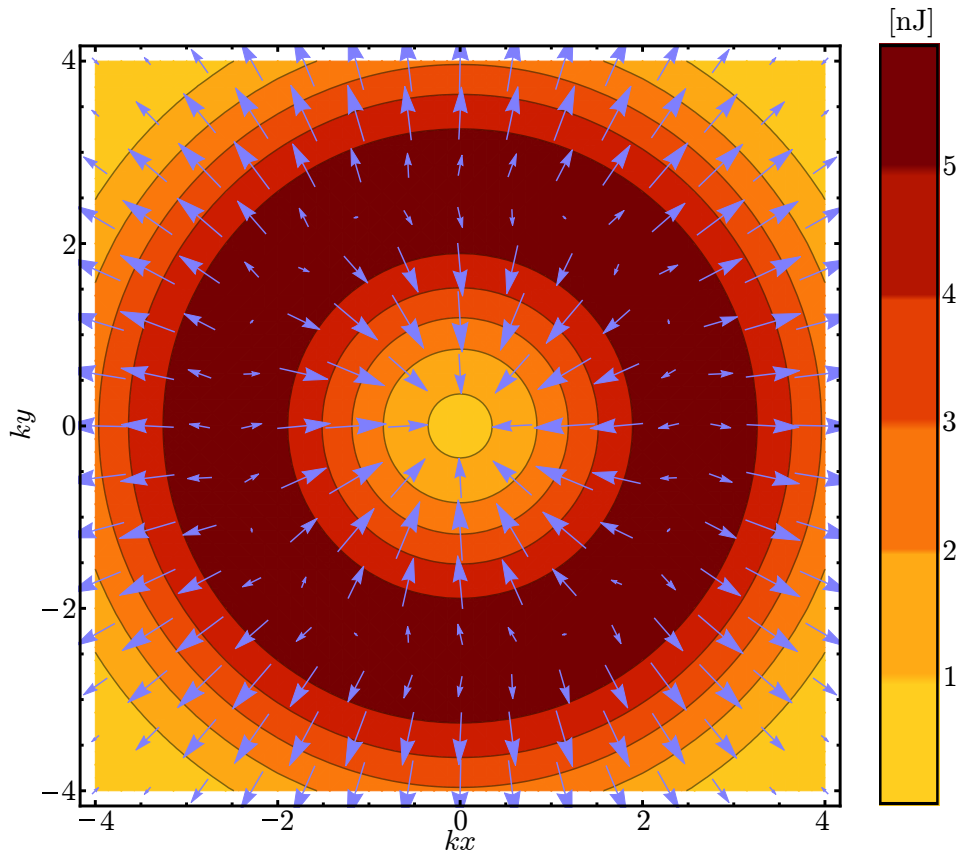


Fonte: Autor, 2015.

força de radiação U_1 dada na Eq. (5.17) pode ser vista através do gráfico de contorno. Note

o feixe de Bessel de primeira ordem produz uma força de radiação acústica transversal convergente na direção do seu eixo na região de $-2 \leq kx, ky \leq 2$, onde a posição central do feixe é uma região de equilíbrio estável para a esfera. Desta forma, ele se comporta como feixe trator (feixe capaz de atrair objetos) 3D completo agindo sobre a partícula de PEAD. De acordo com a Eq. (5.17) a magnitude da força de radiação acústica transversal é aproximadamente a magnitude da energia potencial dividido pelo raio da partícula U_1/a . Assim, uma estimativa do pico de magnitude da força de radiação acústica dá $5 \mu\text{N}$. Isso é cerca de mil vezes maior que a força de radiação acústica axial mostrado na Fig. 5.5(a) para 50 kHz.

Figura 5.6: Campo vetorial (setas) da força de radiação transversal no plano xy , exercido sobre a partícula de PEAD com raio $a = 1 \text{ mm}$ na água. O gráfico de contorno corresponde a energia potencial da força de radiação U_1 dada na Eq. (5.17). Os parâmetros do feixe de Bessel de primeira ordem são os mesmos descritos na legenda da Fig. 5.5. No entanto, aqui fixamos a frequência para 50 kHz. O campo vetorial da força de radiação é calculado através da Eq. (5.20).



Fonte: Autor, 2015.

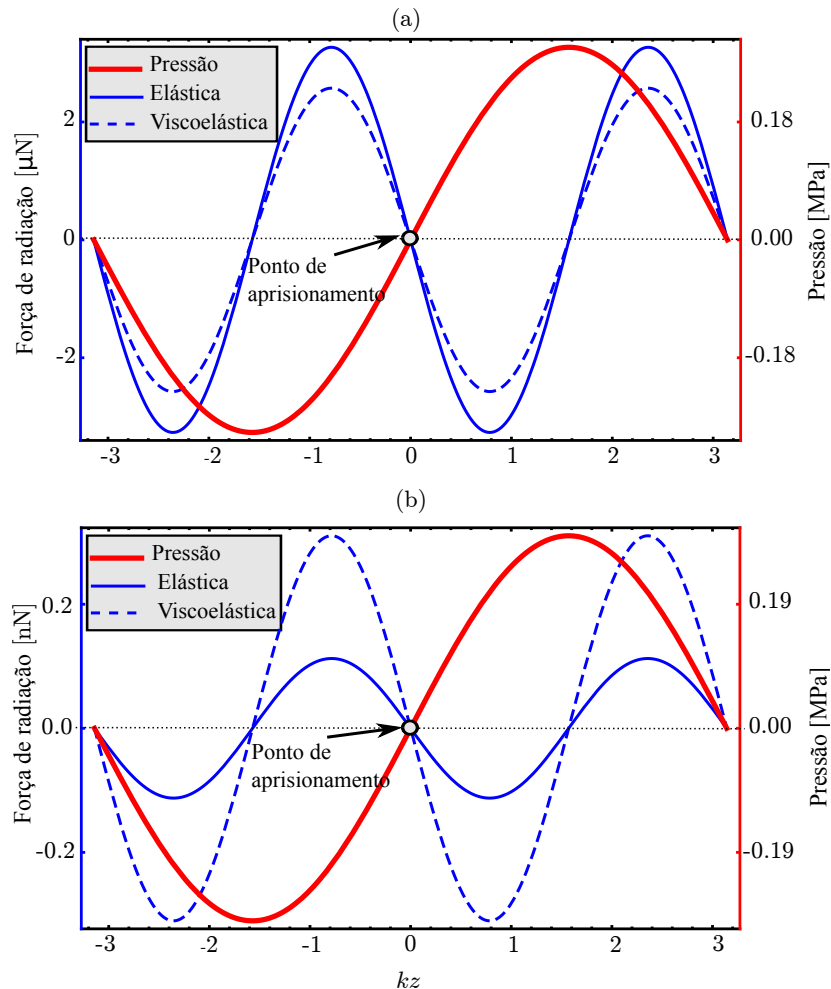
5.2.5 Onda plana estacionária

Na Figura 5.7, apresentamos a força de radiação gradiente devido a uma onda plana estacionária distribuída ao longo do eixo z . Os resultados do modelo de Kelvin-Voigt fracionário (meio dispersivo) é comparado com um sólido elástico sem absorção (meio não

dispersivo). A partir da Eq. (5.8), sabemos que a absorção não afeta a força de radiação gradiente. Apesar disso, a dispersão no interior da partícula pode alterar consideravelmente a amplitude do pico da força de radiação gradiente. Na Fig. 5.7 (a), encontramos que o modelo viscoelástico prevê um pico da força de radiação acústica na partícula de PEAD 26% menor que do modelo sólido elástico. Essa diferença para a partícula de PEBD como mostrado na Fig. 5.7 (b) é de 180%.

Note que o fator de contraste dado na Eq. (5.9) é maior que zero ($\mathcal{C} > 0$), determinando que a partícula (PEAD e PEBD) tem um ponto de equilíbrio estável em um nó de pressão, Fig. 5.7 (a) e (b).

Figura 5.7: Força de radiação acústica produzida por uma onda plana estacionária ao longo do eixo z em (a) uma partícula de PEAD para 50 kHz e (b) uma partícula de PEBD para 2 MHz, imerso em água. Os parâmetros físicos da partícula são dados na Tabela 5.2. A onda plana estacionária tem pico de pressão de 0.3 MPa. A força de radiação foi computada usando a Eq. (5.8). Para o modelo elástico em perdas, assumimos que $f_0^{(R)} = f_0^{(E)}$.



Fonte: Autor, 2015.

5.2.6 Torque de radiação por um feixe de Bessel

Na Figura 5.8, ilustramos o torque de radiação acústico axial gerado por um feixe de Bessel de primeira ordem com ($n = 1$) sobre (a) uma partícula de PEAD e (b) uma partícula de PEBD. As partículas são suspensas sobre o eixo do feixe ($\rho = 0$). O feixe de Bessel de primeira ordem tem os mesmos parâmetros descritos na Figura 5.6. O torque de radiação acústico axial exercido sobre uma partícula de PEAD (regime de baixa frequência) é negativo e aumenta monotonicamente em magnitude com a frequência como pode ser visto na Figura 5.8 (a). Até 72 kHz (ou $\varepsilon < 0.3$) encontramos que a aproximação de baixa frequência é válida com erro absoluto de $\Delta \sim \varepsilon^4$ de acordo com a Eq. (5.24). Para partículas de PEBD, Figura 5.8 (b), o torque de radiação acústico axial é positivo e aumenta monotonicamente com a frequência. No intervalo de 2 a 7.2 MHz, o erro absoluto é $\Delta \sim \varepsilon^4$, que está de acordo com a Eq. (5.24).

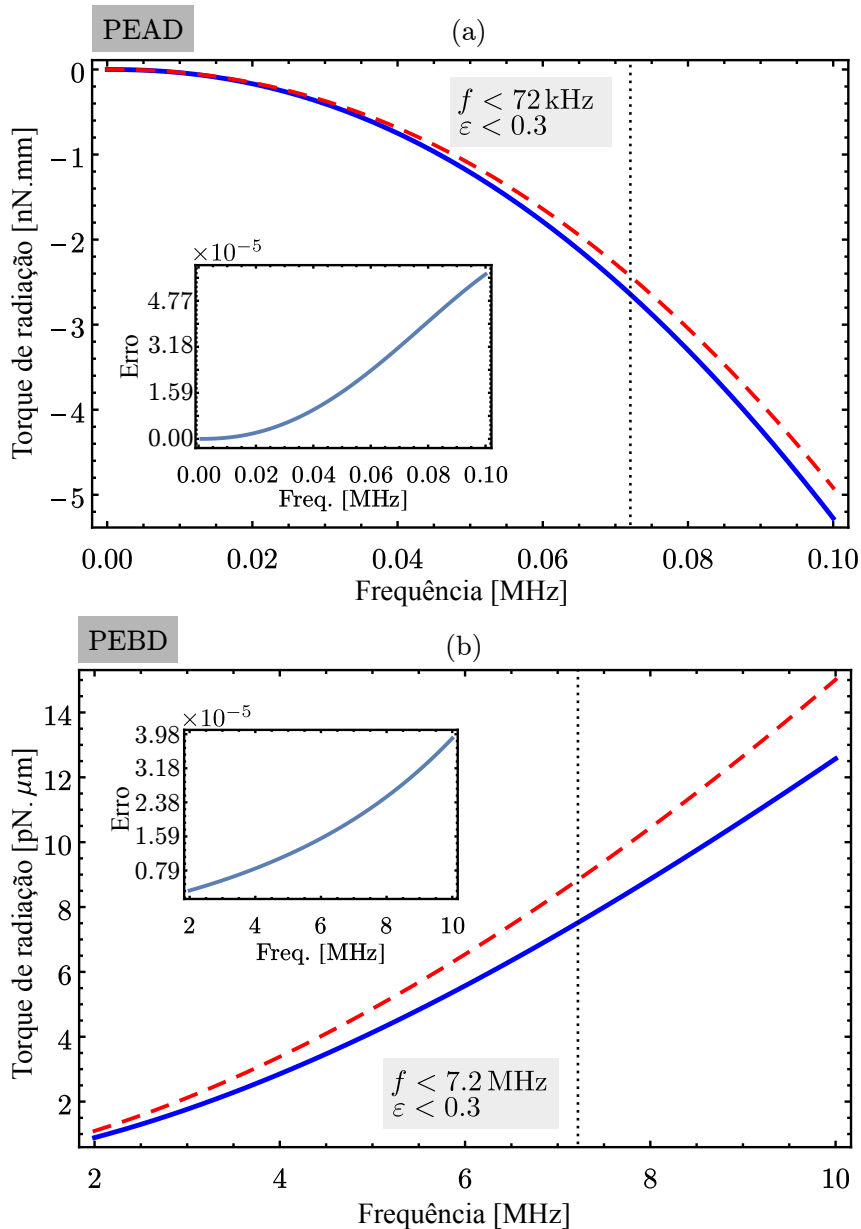
5.2.7 Comparação com partículas sem absorção de cisalhamento

Nesta seção, faremos uma comparação da força e do torque de radiação acústico sobre uma partícula de PEAD e uma partícula de PEBD considerando-a como um material sólido, fluido com absorção longitudinal e viscoelástico. A força de radiação é gerada por uma onda plana progressiva, um feixe de Bessel de ordem zero e um feixe de Bessel de primeira ordem. O ângulo de meio cone é de $\beta = 45^\circ$. As ondas se propagam ao longo do eixo z .

É importante notar que no regime de alta frequência não é possível fazer a comparação com uma partícula fluida compressível, pois o tempo de relaxação em um fluido é sempre pequeno. Desta forma, no regime de alta frequência a partícula não pode se comportar como um fluido compressível. A amplitude da força de radiação sobre uma partícula de PEAD (regime de baixa frequência) é mostrado na figura 5.9(a). A força de radiação descrita pelo modelo viscoelástico mostra um comportamento diferente com relação aos outros materiais (elástica e fluido compressível). Para o modelo viscoelástico a força é negativa para todos os feixes acústicos (OPP, FBOZ, FBPO), isto é, a força atua na direção oposta do feixe incidente. É importante ressaltar que força de radiação acústica negativa devido a uma onda plana foi previsto anteriormente em uma partícula de ouro revestida com uma camada de um polímero (viscoelástico) [61]. Até o momento Força de radiação negativa devido ao um feixe de Bessel só foi previsto para esferas fluidas não absorvedoras no regime de espalhamento Mie, $ka \sim 1$ [31, 34].

Na Fig. 5.9 (b), comparamos a força de radiação exercida sobre uma partícula viscoelástica e uma sólida elástica. Note que independente do material, elástico ou viscoelástico, a força de radiação acústica é sempre positiva nesse regime. Além disso, a força de radiação é bastante diferente dependendo da descrição do material da partícula de PEBD (elástico ou viscoelástico). O modelo considerando a partícula de PEBD como elástica pode ser obtido da Eq. (4.44) fazendo $\tau_\ell = \tau_s = 0$ nas Eqs. (4.68)-(4.71). Esse modelo prevê que a amplitude da força de radiação é cerca de 30 vezes menor que o modelo viscoelástico para uma onda plana progressiva e um feixe de Bessel de ordem zero. Entretanto, para o feixe de Bessel de primeira ordem, a diferença entre estes modelos é de cerca de

Figura 5.8: Torque de radiação acústico versus frequência exercido por um feixe de Bessel de primeira ordem sobre (a) uma partícula de PEAD e (b) uma partícula de PEBD de raio $a = 1.0, 0.01$ mm, respectivamente, imerso em água. Os parâmetros físicos das partículas são dados na Tabela 5.2. O feixe incidente tem seu pico de intensidade de $I_0 = 30 \text{ kW/m}^2$. Legenda: linha sólida azul é o torque de radiação avaliado na aproximação monopolo-dipolo dado na Eq. (4.62), linha vermelha tracejada representa o torque de radiação nos regimes de baixa e alta frequência através da Eq. (5.24). Os insertes mostram o erro relativo entre as fórmulas de torque. A linha vertical pontilhada delimita a região da aproximação Rayleigh $\varepsilon < 0.3$.

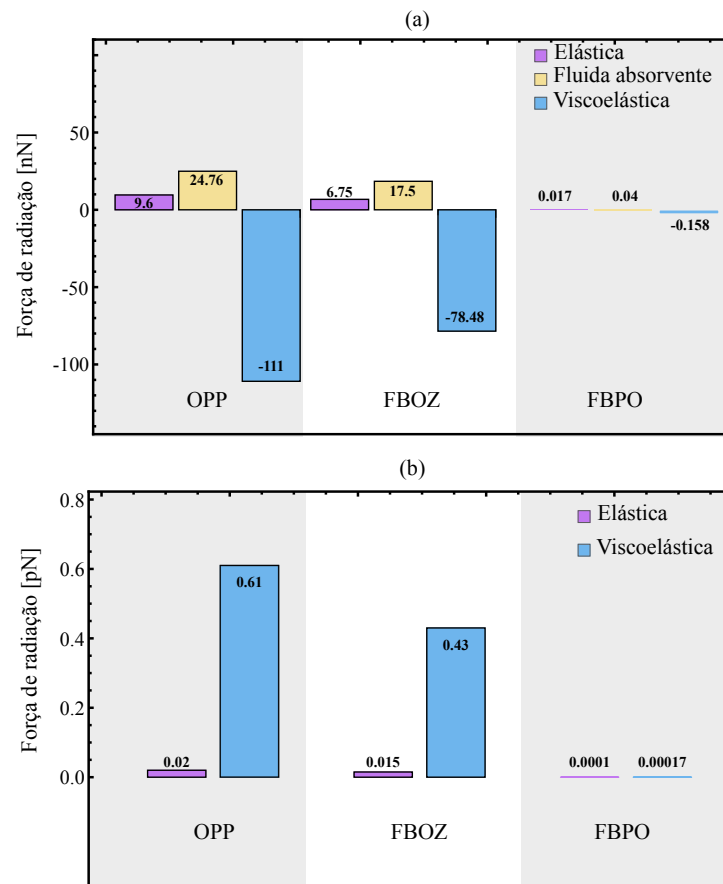


Fonte: Autor, 2015.

duas vezes.

O torque de radiação axial gerado por um feixe de Bessel de primeira ordem sobre uma partícula de PEAD (sólido viscoelástico) suspensas em água sobre o eixo do feixe é com-

Figura 5.9: Força de radiação acústica produzida por uma onda plana progressiva, feixe de Bessel de ordem zero e feixe de Bessel de primeira ordem exercida sobre uma partícula de (a) PEAD e (b) PEBD de raios $a = 1.0, 0.01$ mm, respectivamente. Os feixes incidentes tem frequência de (a) 2MHz e (b) 50kHz, pico de intensidade $I_0 = 30 \text{ kW/m}^2$, e ângulo de meio cone $\beta = 45^\circ$. Os valores das amplitudes das forças são mostrados próximos ou dentro de suas barras correspondentes.



Fonte: Autor, 2015.

parado com o torque axial considerando a partícula de PEAD como fluida absorvedora. O modelo viscoelástico prevê um torque de radiação negativo (isto é, o torque de radiação acústico encontra-se no sentido oposto do fluxo de momento angular médio do feixe incidente) com amplitude $-1.10 \text{ nN} \cdot \text{mm}$, enquanto que o modelo de uma partícula fluida de absorção longitudinal dá um torque de radiação positivo de $0.24 \text{ nN} \cdot \text{mm}$. Novamente a comparação com uma partícula fluida compressível para o regime de alta frequência não é possível pelo mesmo motivo apresentado anteriormente para a comparação da força de radiação.

Os resultados obtidos nesse capítulo mostram que a força de radiação acústica axial é negativa em uma onda plana progressiva e um feixe de Bessel, esse fenômeno ocorre quando a absorção de cisalhamento supera a atenuação longitudinal conforme descrito na Eq. (5.6). A comparação da força de radiação sobre uma partícula viscoelástica e sólida elástica revelam um desvio significativo dos estudos anteriores. Além disso, mostramos que um feixe trator 3D completo atua sobre uma partícula PEAD gerado pelo feixe de Bessel de primeira ordem. Na análise da força de radiação acústica gerado sobre uma partícula viscoelástica por uma onda plana estacionária, desvios relevantes surgiram em comparação com partícula sólida elástica. Observamos uma diferença significativa sobre a magnitude do pico da força de radiação acústica considerando uma partícula de PEBD. Torque de radiação acústico negativo devido a um feixe de Bessel de primeira ordem é apresentado pela primeira vez a comunidade científica. Esses resultados apresentados nesse capítulo podem ser úteis no estudo de manipulação e separação de partículas.

6

Conclusões e trabalhos futuros

6.1 Conclusões

Este trabalho teve como propósito investigar os fenômenos de força e torque de radiação acústico sobre uma partícula sólida viscoelástica. Desta forma, foi possível derivar expressões analíticas para a força e torque de radiação acústico exercido por um feixe com frente de onda arbitrária sobre uma pequena partícula, no chamado limite de espalhamento Rayleigh, suspenso num fluido ideal.

A equação da onda linear, conhecida como equação de Helmholtz foi derivada através das equações de conservação para um fluido ideal. A solução desta equação foi apresentada em termos do método de ondas parciais com o intuito de obter os campos acústicos que são necessários para resolver o problema de espalhamento linear para uma partícula viscoelástica esférica. Além disso, a propagação de ondas no interior da partícula foi modelado através de uma lei de Hooke generalizada (modelo de Kelvin-Voigt fracionário) com os termos de perdas proporcionais a derivada temporal fracionária, veja a Eq. (2.88). Esses estudos de propagação de ondas em um determinado meio (fluido ou sólido) foi de suma importância para a compreensão do problema de espalhamento acústico. É importante ressaltar que o espalhamento está diretamente relacionado com o fenômeno de força e torque de radiação acústico.

Expressões de força e torque de radiação acústico foram derivadas na aproximação de campo distante. Essas fórmulas são mais simples e dependem das propriedades físicas do objeto, dadas pelos coeficientes de espalhamento escalares s_n , e das características da onda incidente denotadas pelos coeficientes de forma do feixe a_{nm} . No regime de espalhamento Rayleigh, força e torque de radiação acústico depende apenas dos coeficientes de espalhamento de monopolo e dipolo. Depois de realizar expansões assintóticas desses coeficientes nos limites de baixa frequência $(\omega\tau_j)^\nu \ll 1$ e alta frequência $(\omega\tau_j)^\nu \gg 1$, encontramos que a força de radiação acústica provocada por uma onda plana progressiva e estacionária, um feixe de Bessel de ordem zero e de primeira ordem, é em grande parte devido aos efeitos de absorção dentro da partícula. O torque de radiação acústico gerado pelo feixe de Bessel de primeira ordem também foi calculado.

Em particular, aplicou-se a teoria desenvolvida no Capítulo 4 sobre uma pequena par-

tícula feita de um material viscoelástico, polietileno de baixa densidade (PEBD) e polietileno de alta densidade (PEAD), suspensa em água devido a uma onda plana progressiva, onda plana estacionária e feixes de Bessel. Os resultados obtidos mostram um desvio significativo dos estudos anteriores para partícula sólida elástica. Além disso, descobrimos que a força de radiação acústica axial é negativa devido a uma onda plana progressiva e um feixe de Bessel, esse fenômeno ocorre quando a absorção de cisalhamento supera a atenuação longitudinal conforme descrito na Eq. (5.6). Torque de radiação acústico negativo devido a um feixe de Bessel de primeira ordem também ocorre quando esta condição é satisfeita. A estabilidade transversal da força de radiação acústica gerada pelo feixe de Bessel de primeira ordem também foi investigada. Mostramos que um feixe trator 3D completo atua sobre uma partícula PEAD. Na análise da força de radiação acústica gerado sobre uma partícula viscoelástica por uma onda plana estacionária, desvios relevantes surgiram em comparação com partícula sólida elástica. Observamos uma diferença significativa sobre a magnitude do pico da força de radiação acústica considerando uma partícula de PEBD. Isso acontece devido a partícula viscoelástica ser um meio dispersivo.

Por fim, a força e torque de radiação acústico exercido sobre uma pequena partícula viscoelástica foram teoricamente investigados. Aspectos inusitados desses fenômenos tais como forças e torques de radiação acústico axiais negativos foram previstos e discutidos. É importante salientar que os resultados aqui apresentados podem ser relevantes para o desenvolvimento de novos dispositivos que utilizam técnicas de manipulação de partículas devido a campos acústicos.

6.2 Trabalhos futuros

A partir deste trabalho, é possível apresentar um método de aprisionamento de partículas viscoelásticas por um transdutor focalizado. Esse método pode ser validado através de simulações computacionais. Além disso, podemos fazer o estudo de dinâmica de partículas para melhor analisar onde ocorre o aprisionamento das partículas. Esse tipo de investigação pode ser fundamental para desenvolver estratégias eficientes de manipulação de partículas.

Com relação a interação de ondas acústicas com um conjunto de partículas, há a necessidade de um estudo detalhado de força e torque de radiação considerando partículas feitas de um material viscoelástico. Em particular, os resultados a serem obtidos podem ser cruciais para separação de partículas utilizando um feixe focalizado, visto que os resultados obtidos neste trabalho para uma única partícula mostram que ela pode ser translada ou atraída dependendo das características físicas da partícula.

Referências

- [1] TORR, G. R. The acoustic radiation force. *Americal Journal of Physics*, v. 52, p. 402–408, 1984.
- [2] LEE, C. P.; WANG, T. G. Acoustic radiation pressure. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 94, p. 1099–1109, 1993.
- [3] WU, J. R. Acoustical tweezers. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 89, p. 2140–2143, 1991.
- [4] TERUYUKI KOZUKA, TORU TUZIUTI, H. M.; FUKUDA, T. Control of a standing wave field using a line-focused transducer for two-dimensional manipulation of particles. *Japanese Journal of Applied Physics*, v. 37, p. 2974–2978, 1998.
- [5] T. LAURELL, F. P.; NILSSON, A. Chip integrated strategies for acoustic separation and manipulation of cells and particles. *Chemical Society Reviews*, v. 36, p. 492–506, 2007.
- [6] JUNGWOO LEE, SHIA-YEN TEH, ABRAHAM LEE, HYUNG, H. K; LEE, C; SHUNG, K. K. Single beam acoustic trapping. *Applied Physics Letters*, Woodbury, v. 95, p. 073701, 2009.
- [7] SHI, J.; AHMED, D.; MAO, X.; LIN, S.; LAWIT, A.; HUANG, T. Acoustic tweezers: patterning cells and microparticles using standing surface acoustic waves (SSAW). *Lab on a Chip*, v. 9, p. 2890–2895, 2009.
- [8] LENSHOF, A.; LAURELL, T. Continuous separation of cells and particles in microfluidic systems. *Chemical Society Reviews*, v. 39, n. 3, p. 1203–1217, 2010.
- [9] FRIEND, J.; YEO, L. Y. Microscale acoustofluidics: Microfluidics driven via acoustics and ultrasonics. *Review Modern Physics*, v. 83, p. 647–704, 2011.
- [10] WANG, Z.; ZHE, J. Recent advances in particle and droplet manipulation for lab-on-a-chip devices based on surface acoustic waves. *Lab Chip*, v. 11, n. 7, p. 1280–1285, 2011.

- [11] LENSHOF, A.; MAGNUSSON, C.; LAURELL, T. Acoustofluidics 8: Applications of acoustophoresis in continuous flow microsystems. *Lab on a Chip*, v. 12, p. 1210–1223, 2012.
- [12] DING, X.; LIN, S.-C. S.; KIRALY, B.; YUE, H.; LI, S.; CHIANG, I.-K.; SHI, J.; BENKOVIC, S. J.; HUANG, T. J. On-chip manipulation of single microparticles, cells, and organisms using surface acoustic waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Washington, v. 109, p. 11105–11109, 2012.
- [13] CHOE, Y.; KIM, J. W.; SHUNG, K. K.; KIM, E. S. Microparticle trapping in an ultrasonic Bessel beam. *Applied Physics Letters*, Woodbury, v. 99, p. 233704, 2011.
- [14] GLYNNE-JONES, P.; BOLTRYK, R. J.; HILL, M. Acoustofluidics 9: Modelling and applications of planar resonant devices for acoustic particle manipulation. *Lab on a Chip*, v. 12, n. 8, p. 1417–1426, 2012.
- [15] COURTNEY, C. R. P.; DEMORE, C. E. M.; WU, H.; GRINENKO, A.; WILCOX, P. D.; COCHRAN, S.; DRINKWATER, B. W. Independent trapping and manipulation of microparticles using dexterous acoustic tweezers. *Applied Physics Letters*, Woodbury, v. 104, p. 154103, 2014.
- [16] TRINH, E. H. Compact acoustic levitation device for studies in fluid dynamics and material science in the laboratory and microgravity. *Review of Scientific Instruments*, Woodbury, v. 56, p. 2059–2065, 1985.
- [17] BRANDT, E. H. Acoustic physics: Suspended by sound. *Nature*, London, v. 413, p. 474–475, 2001.
- [18] FORESTI, D.; NABAVI, M.; KLINGAUF, M.; POULIKAKOS, A. F. D. Acoustophoretic contactless transport and handling of matter in air. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Washington, v. 110, p. 12549–12554, 2013.
- [19] ANDRADE, M. A. B.; PEREZ, N.; ADAMOWSKI, J. C. Particle manipulation by a non-resonant acoustic levitator. *Applied Physics Letters*, Woodbury, v. 106, p. 014101, 2015.
- [20] VOLKE-SEPULVEDA, K.; SANTILLAN, A. O.; BOULLOSA, R. R. Transfer of angular momentum to matter from acoustical vortices in free field. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 100, p. 024302, 2008.
- [21] ANHAUSER, A.; WUNENBURGER, R.; BRASSELET, E. Acoustic rotational manipulation using orbital angular momentum transfer. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 109, p. 034301, 2012.

- [22] SCHWARZ, T.; HAHN, P.; PETIT-PIERRE, G.; DUAL, J. Rotation of fibers and other non-spherical particles by the acoustic radiation torque. *Microfluidics and Nanofluidics*, v. 18, p. 65–79, 2015.
- [23] KING, L. V. On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proceedings of the Royal Society (London)*, v. 147, n. 861, p. 212–240, 1934.
- [24] EMBLETON, T. F. W. Mean force on a sphere in a spherical sound field. I. (Theoretical). *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 26, p. 40–45, 1954.
- [25] YOSIOKA, K.; KAWASIMA, Y. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere. *Acustica*, v. 5, p. 167–173, 1955.
- [26] WESTERVELT, P. J. Acoustic radiation pressure. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 29, p. 26–29, 1957.
- [27] GORKOV, L. P. On the Forces Acting on a Small Particle in an Acoustical Field in an Ideal Fluid. *Soviet Physics – Doklady*, v. 6, n. 9, p. 773–775, 1962.
- [28] NYBORG, W. L. Radiation pressure on a small rigid sphere. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 42, p. 947–952, 1967.
- [29] HASEGAWA, T.; YOSIOKA, K. Acoustic radiation force on a solid elastic sphere. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 46, p. 1139–1143, 1969.
- [30] WU, J.; DU, G. Acoustic radiation force on a small compressible sphere in a focused beam. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 87, p. 997–1003, 1990.
- [31] MARSTON, P. L. Axial radiation force of a Bessel beam on a sphere and direction reversal of the force. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 120, p. 3518–3524, 2006.
- [32] MARSTON, P. L. Negative axial radiation forces on solid spheres and shells in a Bessel beam (L). *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 122, p. 3162–3165, 2007.
- [33] MARSTON, P. L. Radiation force of a helicoidal Bessel beam on a sphere. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 125, n. 6, p. 3539–3547, 2009.
- [34] MITRI, F. G. Negative axial radiation force on a fluid and elastic spheres illuminated by a high-order Bessel beam of progressive waves. *Journal of Physics A, Bristol*, v. 42, p. 245202, 2009.
- [35] MITRI, F. G. Single Bessel tractor-beam tweezers. *Wave Motion*, v. 51, n. 6, p. 986–993, 2014.
- [36] MITRI, F. G. Acoustic radiation force on a sphere in standing and quasi-standing zero-order Bessel beam tweezers. *Annals of Physics, New York*, v. 323, n. 7, p. 1604–1620, 2008.

- [37] MITRI, F. G. Langevin acoustic radiation force of a high-order bessel beam on a rigid sphere. *IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control*, v. 56, p. 1059–1064, 2009.
- [38] MITRI, F. G. Acoustic radiation force of high-order bessel beam standing wave tweezers on a rigid sphere. *Ultrasonics*, v. 49, n. 8, p. 794–798, 2009.
- [39] MITRI, F. G. Acoustic radiation force on an air bubble and soft fluid spheres in ideal liquids: Example of a high-order bessel beam of quasi-standing waves. *The European Physical Journal E: Soft Matter and Biological Physics*, v. 28, n. 4, p. 469–478, 2009.
- [40] MITRI, F. G. Axial and transverse acoustic radiation forces on a fluid sphere placed arbitrarily in Bessel beam standing wave tweezers. *Annals of Physics*, New York, v. 342, p. 158–170, 2014.
- [41] SILVA, G. T. An expression for the radiation force exerted by an acoustic beam with arbitrary wavefront (L). *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 130, n. 6, p. 3541–3544, 2011.
- [42] ZHANG, L.; MARSTON, P. L. Geometrical interpretation of negative radiation forces of acoustical bessel beams on spheres. *Physical Review E*, v. 84, n. 3, p. 035601, 2011.
- [43] ZHANG, L.; MARSTON, P. L. Axial radiation force exerted by general non-diffracting beams. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 131, n. 4, p. 329–335, 2012.
- [44] ZHANG, L.; MARSTON, P. L. Optical theorem for acoustic non-diffracting beams and application to radiation force and torque. *Biomedical Optics Express*, v. 4, n. 9, p. 1610–1617, 2013.
- [45] AZARPEYVAND, M. Acoustic radiation force of a bessel beam on a porous sphere. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 131, n. 6, p. 4337–4348, 2012.
- [46] AZARPEYVAND, M.; AZARPEYVAND, M. Application of acoustic bessel beams for handling of hollow porous spheres. *Ultrasound in Medicine and Biology*, v. 40, n. 2, p. 422–433, 2014.
- [47] BARESCH, D.; THOMAS, J.-L.; MARCHIANO, R. Three-dimensional acoustic radiation force on an arbitrarily located elastic sphere. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 133, n. 1, p. 25–36, 2013.
- [48] BARESCH, D.; THOMAS, J.-L.; MARCHIANO, R. Spherical vortex beams of high radial degree for enhanced single-beam tweezers. *Journal of Applied Physics*, Woodbury, v. 113, p. 184901, 2013.

- [49] SAPOZHNIKOV, O. A.; BAILEY, M. R. Radiation force of an arbitrary acoustic beam on an elastic sphere in a fluid. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 133, n. 2, p. 661–676, 2013.
- [50] SILVA, G. T. Acoustic radiation force and torque on an absorbing compressible particle in an inviscid fluid. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 136, n. 5, p. 2405–2413, 2014.
- [51] WEISER, M. A. H.; APFEL, R. E.; NEPPIRAS, E. A. Interparticle forces on red cells in a standing wave field. *Acta Acustica United with Acustica*, v. 56, p. 114–119, 1984.
- [52] ZHUK, A. P. Hydrodynamic interaction of two spherical particles due to sound waves propagating perpendicularly to the center line. *Soviet Applied Mechanics*, v. 21, p. 110–116, 1985. in English.
- [53] ZHENG, X.; APFEL, R. E. Acoustic interaction forces between two fluid spheres in an acoustic field. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 97, p. 2218–2226, 1995.
- [54] DOINIKOV, A. A. On the radiation pressure on small spheres. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 100, p. 1231–1233, 1996.
- [55] AZARPEYVAND, M.; ALIBAKHSHI, M. A.; SELF, R. Effects of multi-scattering on the performance of a single-beam acoustic manipulation device. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v. 59, n. 8, p. 1741–1749, 2012.
- [56] SILVA, G. T.; BRUUS, H. Acoustic interaction forces between small particles in an ideal fluid. *Physical Review E*, v. 90, n. 6, p. 063007, 2014.
- [57] SEPEHRIRAHNAMA, S.; LIM, K.-M.; CHAU, F. S. Numerical study of interparticle radiation force acting on rigid spheres in a standing wave. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 137, p. 2614–2622, 2015.
- [58] MITRI, F. G. Acoustic radiation force acting on elastic and viscoelastic spherical shells placed in a plane standing wave field. *Ultrasonics*, v. 43, n. 8, p. 681–691, 2005.
- [59] MITRI, F. G. Acoustic radiation force acting on absorbing spherical shells. *Wave Motion*, v. 43, n. 1, p. 12–19, 2005.
- [60] MITRI, F. G.; FELLAH, Z. E. A. Theory of the acoustic radiation force exerted on a sphere by standing and quasistanding zero-order bessel beam tweezers of variable half-cone angles. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v. 55, n. 11, p. 2469–2478, 2008.

- [61] MITRI, F. G.; FELLAH, Z. E. A. The mechanism of the attracting acoustic radiation force on a polymer-coated gold sphere in plane progressive waves. *The European Physical Journal E: Soft Matter and Biological Physics*, v. 26, n. 4, p. 337–343, 2008.
- [62] RAYLEIGH, L. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity. *Philosophical Magazine*, v. 14, p. 186, 1882.
- [63] MAIDANIK, G. Torques due to acoustical radiation pressure. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 30, n. 7, p. 620–623, 1958.
- [64] SMITH, W. E. Acoustic radiation pressure forces and torques from elastic scattering. *Australian Journal of Physics*, v. 25, n. 3, p. 275–282, 1972.
- [65] HEFNER, B. T.; MARSTON, P. L. An acoustical helicoidal wave transducer with applications for the alignment of ultrasonic and underwater systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 106, p. 3313–3316, 1999.
- [66] FAN, Z.; MEI, D.; YANG, K.; CHEN, Z. Acoustic radiation torque on an irregularly shaped scatterer in an arbitrary sound field. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 124, n. 5, p. 2727–2732, 2008.
- [67] ZHANG, L.; MARSTON, P. L. Angular momentum flux of nonparaxial acoustic vortex beams and torques on axisymmetric objects. *Physical Review E*, v. 84, n. 6, p. 065601, 2011.
- [68] ZHANG, L.; MARSTON, P. L. Acoustic radiation torque and the conservation of angular momentum (I). *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 129, n. 4, p. 1679–1680, 2011.
- [69] MITRI, F. G.; LOBO, T. P.; SILVA, G. T. Axial acoustic radiation torque of a Bessel vortex beam on spherical shells. *Physical Review E*, v. 85, n. 2, p. 026602, 2012.
- [70] MITRI, F. G.; SILVA, G. T. Axial acoustic radiation torque of a Bessel vortex beam on spherical shells. *Physical Review E*, v. 85, p. 026602, 2012.
- [71] GAMMEL, A. C.; WANG, T. G. A high-powered siren for stable acoustic levitation of dense materials in the earth's gravity. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 83, p. 496–501, 1988.
- [72] XIE, W.; WEI, B. Parametric study of single-axis acoustic levitation. *Applied Physics Letters*, v. 79, n. 6, p. 881–883, 2001.
- [73] FORESTI, D.; POULIKAKOS, D. Acoustophoretic contactless elevation, orbital transport and spinning of matter in air. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 112, p. 024301, 2014.

- [74] J. MENG, D. MEI, K. Jia, Z. Fan, K. Yang. Contactless and non-invasive delivery of micro-particles lying on a non-customized rigid surface by using acoustic radiation force. *Ultrasonics*, v. 54, p. 1350–1357, 2014.
- [75] LEE, J.; LEE, C.; Kim, H. H.; Jacob, A.; Lemor, R.; Teh, S.; Lee, A.; SHUNG, K. K. Targeted cell immobilization by ultrasound microbeam. *Biotechnology and Bioengineering*, v. 108, p. 1643–1650, 2011.
- [76] K. H. LAM, H. S. HSU, Y. Li; C. Lee; A. LIN; Q. ZHOU; E. S. K. K. SHUNG. Ultrahigh frequency lensless ultrasonic transducers for acoustic tweezers application. *Biotechnology and Bioengineering*, v. 110, p. 881–886, 2013.
- [77] H. S. HSU, F. ZHENG, Y. Li, C. Lee, Q. Zhou and SHUNG, K. K. Focused high frequency needle transducer for ultrasonic imaging and trapping. *Applied Physics Letters*, Woodbury, v. 101, p. 024105, 2012.
- [78] EVANDER, M.; NILSSON, J. Acoustofluidics 20: Applications in acoustic trapping. *Lab Chip*, v. 12, p. 4667–4676, 2012.
- [79] M. WIKLUND, S. N.; HERTZ, H. M. Ultrasonic trapping in capillaries for trace-amount biomedical analysis. *Journal of Applied Physics*, v. 90, n. 1, 2001.
- [80] WIKLUND, M.; HERTZ, H. M. Ultrasonic enhancement of bead-based bioaffinity assays. *Lab Chip*, v. 6, p. 1279–1292, 2006.
- [81] J. HULTSTROM, O. MANNEBERG, K. DOPF, M. H. HERTZ, H. BRISMAR; WIKLUND, M. Proliferation and viability of adherent cells manipulated by standing-wave ultrasound in a microfluidic chip. *Ultrasound in medicine and biology*, v. 33, n. 1, p. 145–151, 2007.
- [82] M. EVANDER, L. JOHANSSON, T. LILLIEHORN, J. PISKUR, M. LINDVALL, S. JOHANSSON, M. ALMQVIST, T. LAURELL; NILSSON, J. Noninvasive acoustic cell trapping in a microfluidic perfusion system for online bioassays. *Analytical Chemistry*, v. 79, p. 2984–2991, 2007.
- [83] S.B.Q. TRAN, P. M.; THIBAUT, P. Fast acoustic tweezers for the twodimensional manipulation of individual particles in microfluidic channels. *Applied Physics Letters*, v. 101, p. 114103, 2012.
- [84] BOAL, D. H. *MECHANICS OF THE CELL*. 2nd. ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2012.
- [85] EPSTEIN, P. S.; CARHART, R. R. The absorption of sound in suspension and emulsions: I. Water fog in air. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 25, p. 553–565, 1953.

- [86] MAINARDI, F. *FRACTIONAL CALCULUS AND WAVES IN LINEAR VISCO-ELASTICITY: AN INTRODUCTION TO MATHEMATICAL MODELS*. London, UK: Imperial College Press, 2010.
- [87] SZABO, T. L.; WU, J. A model for longitudinal and shear wave propagation in viscoelastic media. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 107, n. 5, p. 2437–2446, 2000.
- [88] CHEN, W.; HOLM, S. Modified szabo wave equation models for lossy media obeying frequency power law. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 114, n. 5, p. 2570–2574, 2003.
- [89] HOLM, S.; NÄSHOLM, S. P. Comparison of fractional wave equations for power law attenuation in ultrasound and elastography. *Ultrasound in medicine and biology*, v. 40, n. 4, p. 695–703, 2014.
- [90] HOLM, S.; NÄSHOLM, S. P.; PRIEUR, F.; SINKUS, R. Deriving fractional acoustic wave equations from mechanical and thermal constitutive equations. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 66, n. 5, p. 621–629, 2013.
- [91] MASE, G. E. *THEORY AND PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS*. McGraw-Hill book company, 1970. v. 1.
- [92] WILLIAMS, E. G. *FOURIER ACOUSTICS: SOUND RADIATION AND NEAR-FIELD ACOUSTICAL HOLOGRAPHY*. London, UK: Academic press, 1999.
- [93] SEGEL, L. A. *MATHEMATICS APPLIED TO CONTINUUM MECHANICS*. 2007.
- [94] AYRES, V.; GAUNAURD, G. C. Acoustic resonance scattering by viscoelastic objects. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 81, n. 02, p. 301–311, 1987.
- [95] GRAFF, K. F. *WAVE MOTION IN ELASTIC SOLIDS*. Mineola, NY USA: Dover, 1975.
- [96] GRAY, C. G.; NICKEL, B. G. Debye potential representation of vector fields. *American Journal of Physics*, New York, v. 46, n. 7, p. 735–736, 1978.
- [97] JOHN WILLIAM STRUTT, B. R. *THE THEORY OF SOUND*. Dover Publications, 1945. v. 1.
- [98] MORSE, P. M.; INGARD, K. U. *THEORETICAL ACOUSTICS*. Princeton University Press, 1987.
- [99] FARAN, J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 23, n. 4, p. 405–413, 1951.

- [100] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS*. San Diego, CA, USA: Academic Press, Inc., 1985.
- [101] WOLFRAM RESEARCH, I. *MATHEMATICA 10*. Version 10.1. ed. Champaign, IL USA: Wolfram Research, Inc., 2015.
- [102] WESTERVELT, P. J. Theory of steady forces caused by sound waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 23, p. 312–315, 1951.
- [103] LÖFSTEDT, R.; PUTTERMAN, S. Theory of long wavelength acoustic radiation pressure. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 90, n. 4, p. 2027–2033, 1991.
- [104] JACKSON, J. D. *CLASSICAL ELECTRODYNAMICS*. John Wiley, 1998.
- [105] HOLM, S.; SINKUS, R. A unifying fractional wave equation for compressional and shear waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 127, n. 1, p. 542–548, 2010.
- [106] KINSLER, L. E.; FREY, A. R.; COPPENS, A. B.; SANDERS, J. V. *FUNDAMENTALS OF ACOUSTICS*. 4th. ed. New York, NY USA: John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [107] J. DURNIN, J.J MICELI, J.; EBERLY, J. H. Diffraction-free beams. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 58, n. 15, p. 1499 – 1501, 1987.
- [108] MITRI, F.; SILVA, G. Off-axial acoustic scattering of a high-order bessel vortex beam by a rigid sphere. *Wave Motion*, v. 48, n. 5, p. 392–400, 2011.
- [109] WU, J. Determination of velocity and attenuation of shear waves using ultrasonic spectroscopy. *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 99, n. 05, p. 2871–2875, 1996.
- [110] ROHATGI, A. WebPlotDigitizer: Web based tool to extract data from plots, images, and maps, 2015.
- [111] WEISSTEIN, E. W. Levenberg-Marquardt Method. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, 2015.